北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期期中阶段练习

高二数学

2023. 11

班级____________姓名____________学号________

本试卷共 3 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置。

1. 已知 $A(-1,-3), B(3,5)$，则直线 AB 的斜率为

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 不存在

2. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心坐标为

A. （−2，4）　　B. （2，−4）　　C. （1，−2）　　D. （−1，2）

3.一个椭圆的两个焦点分别是 $F_1(-3,0), F_2(3,0)$，椭圆上的点 P 到两焦点的距离之和等于 8，则该椭圆的标准方程为

A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$　　C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

4.任意的 $k\in R$，直线 $kx-y+1=3k$ 恒过定点

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(3,1)$　　D. $(2,1)$

5. 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-8x+7=0$，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是

A. 相离　　B. 相交　　C. 内切　　D. 外切

6. 过点 $P\ (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 有公共点，则直线 l 的倾斜角取值范围是

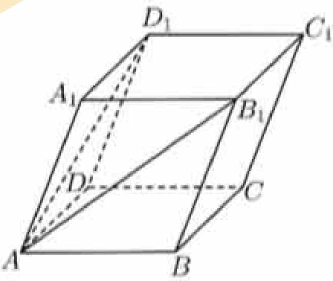
A. $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$　　B. $[\frac{2\pi}{3},\pi)$　　C. $[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$　　D. $[\frac{5\pi}{6},\pi)$

7.“$a=-1$”是“直线 l_1：$ax+4y-3=0$ 与直线 l_2：$x+(a-3)y+2=0$”平行的

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

8.如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=AB=2$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BAA_1=\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}=$

A．12　　B．8　　C．6　　D．4



9.数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半.这条直线被后人称为三角形的欧拉线，已知△ABC 的顶点 $A(2,0)$，$B(1,2)$，且 $AC=BC$，则△ABC 的欧拉线的方程为

A．$x-2y-4=0$　B．$2x+y-4=0$　C．$4x+2y+1=0$　D．$2x-4y+1=0$

10.曲线 $C:x^3+y^3=1$.给出下列结论

①曲线 C 关于原点对称；
②曲线 C 上任意一点到原点的距离不小于 1；
③曲线 C 只经过 2 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）.
其中，所有正确结论的序号是（　　）

A．①②　　B．②　　C．②③　　D．③

二、填空题：本大题共 5 小题，共 25 分。把答案填在答题纸中相应的横线上。

11．已知空间 $\vec{a}=(2,3,1)$，$\vec{b}=(-4,2,x)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$_____.

12．已知过点(0,2)的直线 l 的方向向量为(1,6)，点 $A(a,b)$在直线 l 上，则满足条件的一组非零实数 a，b 的值依次为______.

13．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 C_1D_1 的中点，则异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为____________.

14.将一张坐标纸对折，如果点$(0,m)$与点$(m-2,2)$重合，则点$(-4,1)$与点__________重合.

15.给定两个不共线的空间向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，定义叉乘运算：$\vec{a}\times\vec{b}$.规定：

（i）$\vec{a}\times\vec{b}$为同时与$\vec{a}$，$\vec{b}$垂直的向量；

（ii）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$三个向量构成右手系（如图1）；

（iii）$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$.

如图2，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=2$，$AA_1=4$.给出下列四个结论：

①$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA_1}$；

②$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}$；

③$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\times\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AA_1}$；

④$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{CC_1}$.其中，正确结论的序号是__________.

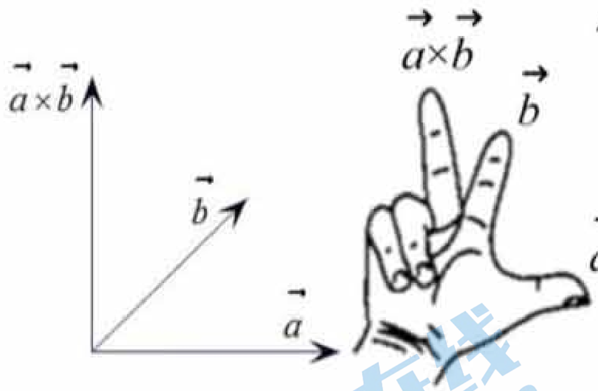


图1

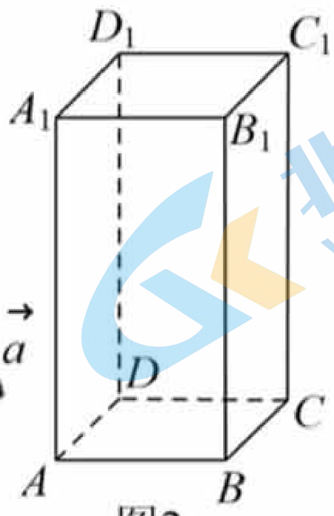


图2

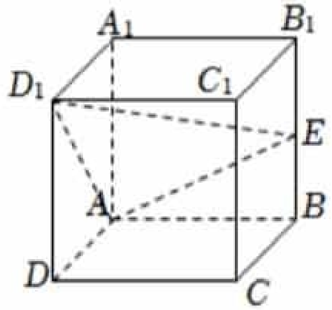
三、解答题：本大题共 6 题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并把答案写在答题纸中相应位置上。

16. （本题 14 分）在平面直角坐标系中，已知 $A(-3,9),B(2,2),C(5,3)$，线段 AC 的中点 M；

（I）求过 M 点和直线 BC 平行的直线方程；

（II）求 BC 边的高线所在直线方程.

17. （本题 14 分）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 BB_1 的中点.



（I）求证：BC_1 // 平面 AED_1；

（II）直线 AA_1 与平面 AED_1 所成角的正弦值；

（III）求点 A_1 到平面 AED_1 的距离.

18. （本题 14 分）已知圆 C 的圆心在直线 $2x-y=0$ 上，且与 x 轴相切于点 $(1,0)$.

（I）求圆 C 的方程；

（II）若圆 C 直线 $l:x-y+m=0$ 交于 A，B 两点，______，求 m 的值.

从下列三个条件中任选一个补充在上面问题中并作答：

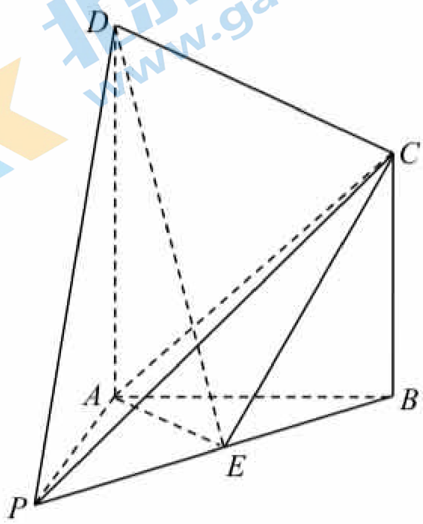
条件①：圆 C 被直线 l 分成两段圆弧，其弧长比为 $2:1$；

条件②：$|AB|=2\sqrt{2}$；

条件③：$\angle ACB=90°$.

19.（本题 14 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\perp$ 平面 ABP，$BC\,//\,AD$，$\angle PAB=90^\circ$．

$PA=AB=2$，$AD=3$，$BC=m$，E 是 PB 的中点．



（I）证明：$AE\perp$ 平面 PBC；

（II）若二面角 $C-AE-D$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 m 的值；

（III）若 $m=2$，在线段 AD 上是否存在一点 F，使得 $PF\perp CE$．若存在，确定 F 点的位置；若不存在，说明理由．

20.（本题 14 分）已知圆 C：$(x-a)^2+y^2=1$ 与直线 $y=-x-1$ 交于 M、N 两点，点 P 为线段 MN 的中点，O 为坐标原点，直线 OP 的斜率为 $-\dfrac{1}{3}$．

（Ⅰ）求 a 的值及 ΔMON 的面积；

（Ⅱ）若圆 C 与 x 轴交于 A、B 两点，点 Q 是圆 C 上异于 A、B 的任意一点，直线 QA、QB 分别交 $l:x=-4$ 于 R、S 两点．当点 Q 变化时，以 RS 为直径的圆是否过圆 C 内的一定点，若过定点，请求出定点；若不过定点，请说明理由．

21. （本题 15 分）已知 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，记 $A_i=\{x|x=a+t_i,a\in A\}(i=1,2)$，用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

（I）若 $n=4$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，分别指出 $A=\{1,2,3\}$ 和 $A=\{1,2,4\}$ 时，集合 T 的情况（直接写出结论）；

（II）若 $n=6$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，求 $|A_1\cup A_2|$ 的最大值；

（III）若 $n=7$，$|A|=4$，则对于任意的 A，是否都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$？说明理由.

北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期期中阶段练习

高二数学参考答案

2023. 11

一、选择题：本大题共 30 道小题，1-20 题，每小题 1 分，21-30 题，每小题 2 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	B	C	D	A	A	B	D	C

二、选择题

11. $2\sqrt{6}$　　12. 1，8（答案不唯一） $b=6a+2$

13. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　14. $(-1,-2)$　　15. ①③④

三、解答题

16.（14 分）解：（I）因为 $A(-3,9),C(5,3)$，所以 AC 的中点坐标 $M(1,6)$，

又直线 BC 的斜率 $k=\dfrac{3-2}{5-2}=\dfrac{1}{3}$，

所以过 M 点和直线 BC 平行的直线方程为 $y-6=\dfrac{1}{3}(x-1)$，

即 $x-3y+17=0$.

（II）由（1）可知 BC 的斜率 $k=\dfrac{3-2}{5-2}=\dfrac{1}{3}$，

所以与 BC 垂直的直线的斜率 $k'=\dfrac{-1}{k}=-3$，

所以 BC 边的高线所在直线方程为 $y-9=-3(x+3)$，

即 $3x+y=0$.

17.（1）证明：因为在正方体中，$AB // C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，

所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，所以 $BC_1 // AD_1$，

因为 $BC_1 \not\subset$ 平面 AED_1，$AD_1 \subset$ 平面 AED_1，所以 $BC_1 //$ 平面 AED_1；

解：（2）如图，以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系，

则 A_1（0，0，2），A（0，0，0），D_1（2，0，2），E（0，2，1），

则$\overrightarrow{AA_1}=$（0，0，2），$\overrightarrow{AD_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

设平面 AED_1 的一个法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

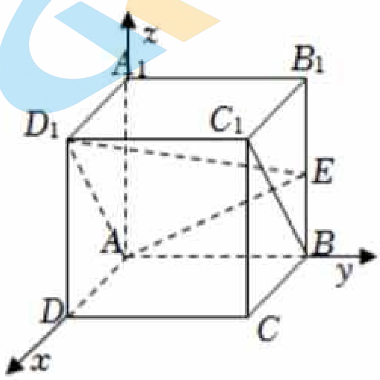
令 $y=1$，可得 $x=2$，$z=-2$，即$\vec{n}=(2,1,-2)$，

设直线 AA_1 与平面 AED_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{m}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{AA_1}||\vec{m}|}=\dfrac{2}{3}$

所以直线 AA_1 与平面 AED 所成角的正弦值为$\dfrac{2}{3}$．

（3）则点 A_1 到平面 AED_1 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{4}{3}$



18.解：（1）设圆心坐标为$C(a,b)$，半径为r.

由圆C的圆心在直线$2x-y=0$上，知：$2a=b$.

又∵圆C与x轴相切于点$(1,0)$，

∴$a=1$，$b=2$，则$r=|b-0|=2$.

∴圆C　圆心坐标为$(1,2)$，则圆C的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

（2）如果选择条件①：$\angle ACB=120°$，而$|CA|=|CB|=2$，

∴圆心C到直线l的距离$d=1$，

则$d=\dfrac{|1-2+m|}{\sqrt{1+1}}=1$，

解得$m=\sqrt{2}+1$或$-\sqrt{2}+1$.

如果选择条件②和③：$|AB|=2\sqrt{2}$，而$|CA|=|CB|=2$，

∴圆心C到直线l的距离$d=\sqrt{2}$，

则$d=\dfrac{|1-2+m|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，

解得$m=-1$或3.

19.（I）证明：因为 $AD\perp$平面PAB， $BC//AD$，所以 $BC\perp$平面PAB.

又因为 $AE\subset$平面PAB，所以 $AE\perp BC$.

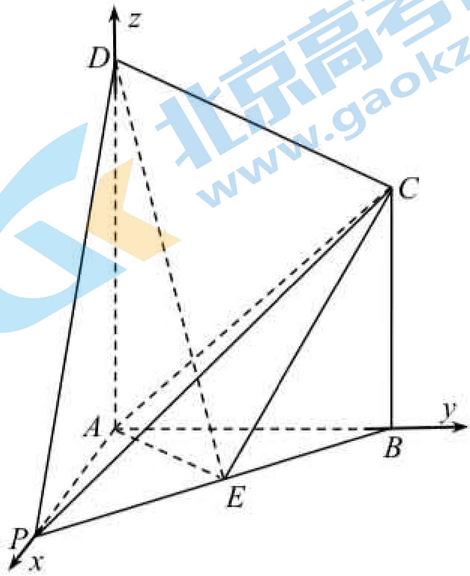
在ΔPAB中，$PA=AB$，E是PB的中点，所以 $AE\perp PB$.

又因为 $BC\cap PB=B$，所以 $AE\perp$平面PBC.

（II）解：因为 $AD\perp$平面PAB，

所以 $AD\perp AB$， $AD\perp PA$．又因为 $PA\perp AB$，

所以 如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$．



则 $A(0,0,0)$， $B(0,2,0)$， $C(0,2,m)$， $E(1,1,0)$，

$P(2,0,0)$， $D(0,0,3)$，

$\overrightarrow{AC}=(0,2,m)$， $\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$．

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y+mz=0,\\ x+y=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=-1$， $z=\dfrac{2}{m}$， 于是 $\boldsymbol{n}=(1,-1,\dfrac{2}{m})$．

因为 $AD\perp$ 平面 PAB， 所以 $AD\perp PB$．又 $PB\perp AE$， 所以 $PB\perp$ 平面 AED．

又因为 $\overrightarrow{PB}=(-2,2,0)$，

所以 取平面 AED 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(-1,1,0)$．

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即 $\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\dfrac{4}{m^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， 解得 $m^2=1$．

又因为 $m>0$， 所以 $m=1$ ．

（III）结论：不存在.理由如下：

证明：设 $F(0,0,t)$ $(0\le t\le 3)$.

当 $m=2$ 时，$C(0,2,2)$.

$\overrightarrow{PF}=(-2,0,t)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,-2)$.

由 $PF\perp CE$ 知，$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，$-2-2t=0$，$t=-1$.这与 $0\le t\le 3$ 矛盾.

所以，在线段 AD 上不存在点 F，使得 $PF\perp CE$.

20 解：（Ⅰ）由题知：直线 OP 方程为 $y=-\dfrac{1}{3}x$，

则由 $\begin{cases} y=-x-1 \\ y=-\dfrac{1}{3}x \end{cases}$，得到 $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，即 $P(-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$，

$\because$ 点 P 为线段 MN 的中点，$\therefore MN\perp PC$，

即 $k_{MN}\cdot k_{PC}=-1\times\dfrac{0-\dfrac{1}{2}}{a+\dfrac{3}{2}}=-1$，

$\therefore a=-2$；

$\therefore C(-2,0)$ 到直线 $y=-x-1$ 距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore |MN|=2\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.

又 $\because$ O 到直线y=-x-1的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，MN 边上的高为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore S_{\Delta MNO}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）不妨设直线 QA 的方程为 $y=k\left(x+3\right)$，其中 $k\neq 0$，

在直线 QA 的方程中，令 $x=-4$，可得 $R\left(-4,-k\right)$，

因为 $QA\perp QB$，则直线 QB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}\left(x+1\right)$，

在直线 QB 的方程中，令 $x=-4$，可得 $y=-\dfrac{1}{k}$，即点 $S\left(-4,\dfrac{3}{k}\right)$，

线段 RS 的中点为 $F\left(-4,\dfrac{3-k^2}{2k}\right)$，半径平方为 $\left(\dfrac{k^2+3}{2k}\right)^2$，

所以，以线段 MN 为直径的圆的方程为 $\left(x+4\right)^2+\left(y-\dfrac{3-k^2}{2k}\right)^2=\left(\dfrac{k^2+3}{2k}\right)^2$，

即 $\left(x+4\right)^2+y^2-\dfrac{3-k^2}{k}y-3=0$，由 $\begin{cases}\left(x+4\right)^2-3=0\\ y=0\\ -3<x<-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-4+\sqrt{3}\\ y=0\end{cases}$，

因此，当点 Q 变化时，以 RS 为直径的圆恒过圆 C 内的定点 $(-4+\sqrt{3},0)$.

21.（1）若 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，则 $t_1 - t_2 \neq a - b$，其中 $a, b \in A$，

否则 $t_1 + a = t_2 + b$，$A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$，

若 $n = 4$，当 $A = \{1,2,3\}$ 时，$2-1=1$，$3-1=2$，

所以 $t_1 - t_2 \neq 1,2$，则 t_1，t_2 相差 3，

因为 $S = \ 1,2,3,4$ ，$T = \{t_1, t_2\} \subseteq S$，

所以 $T = \{1,4\}$；

当 $A = \{1,2,4\}$ 时，$2-1=1$，$4-2=2$，$4-1=3$，

所以 $t_1 - t_2 \neq 1,2,3$，

因为 $S = \ 1,2,3,4$ ，$T = \{t_1, t_2\} \subseteq S$，

所以 T 不存在；

（2）若 $n = 6$，$A_1 \cap A_2 = \varnothing$，$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

当 $A = S$ 时，$2-1=1$，$5-1=4$，$5-2=3$，$7-1=6$，$7-2=5$，$7-5=2$，

所以 $A \neq S$，$t_1 - t_2 \neq 1,2,3,4,5$，所以 T 不存在；

所以 A 中至多有 5 个元素；

当 $A = \{2,3,4,5,6\}$ 时，$3-2=1$，$4-2=2$，$5-2=3$，$6-2=4$，

所以 $t_1 - t_2 \neq 1,2,3,4$，则 t_1，t_2 相差 5，

所以 $T = \{1,6\}$；

$A_i=\{x|x=a+t_i, a\in A\}(i=1,2)$，

所以 $A_1=\{3,4,5,6,7\}$， $A_2=\{8,9,10,11,12\}$， $A_1\cup A_2=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

因为A 中至多有 5 个元素，所以 A_1, A_2 也至多有 5 个元素，

所以 $|A_1\cup A_2|$ 的最大值为 10.

（3）不一定存在，

当 $A=\{1,2,5,7\}$ 时，

$2-1=1$， $5-1=4$， $5-2=3$， $7-1=6$， $7-2=5$， $7-5=2$，

则 t_1， t_2 相差不可能 1，2，3，4，5，6，这与 $T=\{t_1, t_2\}\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 矛盾，

故不都存在 T.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！