

2024 届高三一轮复习联考(三)

数学试题

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知 M, N 是全集 U 的非空子集,且 $M \subseteq \complement_U N$, 则

- A. $N \subseteq M$ B. $M \subseteq N$ C. $\complement_U M \subseteq \complement_U N$ D. $N \subseteq \complement_U M$

2.若 z 满足 $(1+i)z = -2+i$, 则 $|z| =$

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. 5 D. $\sqrt{10}$

3.已知非零向量 a, b , 那么“ $a = tb$ ”是“ $|a - b| = |a| - |b|$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4.记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = 4, c = 6, B = \frac{\pi}{3}$, 则 AC 边上的高为

- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{6\sqrt{21}}{7}$

5.已知某物种 t 年后的种群数量 y 近似满足函数模型: $y = k_0 \cdot e^{1.4e - 0.125t}$ ($k_0 > 0$). 自 2023 年初起, 经过 n 年后 ($n \in \mathbb{N}^*$), 当该物种的种群数量不足 2023 年初的 20% 时, n 的最小值为(参考数据: $\ln 5 \approx 1.6094$)

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

6.过点 $(2, 0)$ 作曲线 $f(x) = xe^x$ 的两条切线, 切点分别为 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, 则 $\frac{1}{x_1} +$

- $\frac{1}{x_2} =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

7. 对于一个给定的数列 $\{a_n\}$, 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一阶商数列, 再令 $c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 则数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的二阶商数列. 已知数列 $\{A_n\}$ 为 $1, 2, 8, 64, 1\ 024, \dots$, 且它的二阶商数列是常数列, 则 $A_7 =$

- A. 2^{15} B. 2^{19} C. 2^{21} D. 2^{28}

8. 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 设 $a = f\left(\frac{1}{5}\right)$, $b = f\left(\sin \frac{1}{5}\right)$, $c = f\left(\ln \frac{6}{5}\right)$, 则

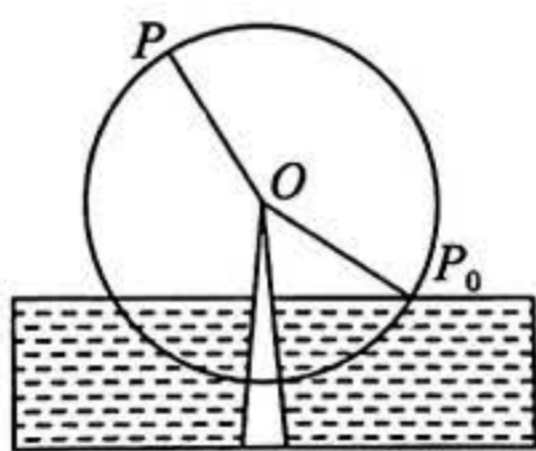
- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值 4 B. \sqrt{ab} 有最大值 $\frac{1}{2}$
 C. $\log_2 a + \log_2 b \leq -2$ D. $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2}$

10. 一半径为 2 米的水轮, 水轮圆心 O 距离水面 1 米(如图). 已知水轮按逆时针方向绕圆心 O 做匀速转动, 每 1 分钟转动一圈, 如果当水轮上点 P 从水面浮现时开始计时, 则下列判断正确的有



- A. 点 P 第一次到达最高点需要 20 秒
 B. 点 P 第一次到达最低点需要 45 秒
 C. 在水轮转动的一圈内, 有 20 秒的时间, 点 P 在水面的下方
 D. 当水轮转动 30 秒时, 点 P 距离水面的高度是 2 米

11. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 1, E 为 AB 的中点, 则

- A. $BC_1 \parallel$ 平面 A_1EC
 B. 二面角 $A_1 - EC - A$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 C. 点 A 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$
 D. 若棱柱的各顶点都在同一球面上, 则该球的半径为 $\frac{\sqrt{21}}{6}$

12. 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 均为偶函数, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
B. 2 为函数 $f(x)$ 的周期
C. $f'(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称
D. $f'(x)$ 为偶函数

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x > 0, \\ f(x+2), & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(-5)$ 的值为 _____.

14. 已知 α 为锐角且满足 $1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ} = \frac{1}{\cos \alpha}$, 则 $\sin(\alpha + 20^\circ) =$ _____.

15. 已知各项均不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a_n + 1}$, 且 $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_{2021} =$ _____.

16. 在四棱锥 $M-ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 3$, $BC = 2$, $MA = MB = MD = 2\sqrt{3}$, 则三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_9 = -99$, $S_4 = S_{16}$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若对任意正整数 n , 均有 $S_m \leq S_n + 1$, 求正整数 m 的最大值.

18. (12 分) 已知向量 $m = \left(2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \sqrt{3} \right)$, 向量 $n = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right)$, $f(x) = m \cdot n$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;
(2) 若 $g(x) = f(\omega x) - 1$ ($\omega > 0$) 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上有唯一的零点, 求 ω 的取值范围.

19.(12分)已知函数 $f(x) = x^3 + \frac{3m}{2}x^2 - 3x + 2$.

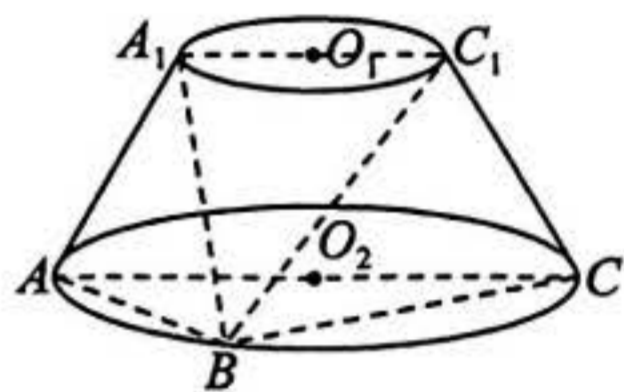
(1)若 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上存在单调减区间,求实数 m 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(m, +\infty)$ 上有极小值,求实数 m 的取值范围.

20.(12分)如图,圆台 O_1O_2 的轴截面为等腰梯形 A_1ACC_1 , $AC=4$, $AA_1=A_1C_1=2$, B 为下底面圆周上异于 A, C 的点.

(1)在线段 BC 上是否存在一点 P ,使得 $C_1P \parallel$ 平面 A_1AB ? 若存在,指出点 P 的位置,并证明;若不存在,请说明理由;

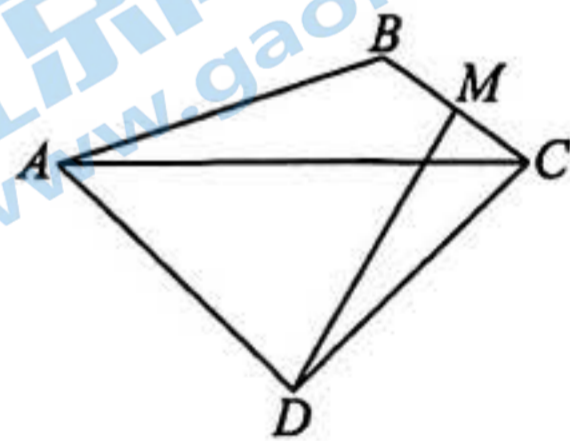
(2)若四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积为 $2\sqrt{3}$,求平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值.



21.(12分)如图,在平面凸四边形 $ABCD$ 中, $AB=2BC=2$, $AD=CD$, $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$, M 为边 BC 的中点.

(1)若 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$,求 $\triangle ACD$ 的面积;

(2)求 DM 的最大值.



22.(12分)已知函数 $f(x) = x(a \ln x - x - 1)$, $a \in \mathbf{R}$.

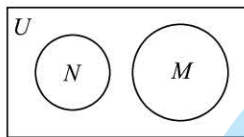
(1)当 $a=1$ 时,求证: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

(2)若 $f(x) + x = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(i)求实数 a 的取值范围;

(ii)求证: $x_1 \cdot x_2 > e^2$.

1.D 【解析】因为 M, N 是全集 U 的非空子集, 且 $M \subseteq \complement_U N$, 所以韦恩图为:



由韦恩图可知, D 正确. 故选 D.

2.B 【解析】因为 $(1+i)z = -2+i$, 所以 $|z| = \left| \frac{-2+i}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 B.

3.B 【解析】对 $|a-b| = |a| - |b|$ 两边平方, 整理可得向量 a 与 b 的夹角为 0 , 向量 a 与 b 平行且同向, 从而存在实数 $t (t > 0)$; 由 $a = tb$ 可得向量 a, b 平行, a 与 b 同向或者反向, 因此“ $a = tb$ ”是“ $|a-b| = |a| - |b|$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

4.D 【解析】由 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 28$, 得 $b = 2\sqrt{7}$, 设 AC 边上的高为 h , 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bh$, 所

以 $h = \frac{ac \sin B}{b} = \frac{6\sqrt{21}}{7}$, 即 AC 边上的高为 $\frac{6\sqrt{21}}{7}$. 故选 D.

5.D 【解析】根据题意得 2023 年初 ($t=0$) 时种群数量为 $k_0 \cdot e^{1.4c}$, 所以由 $y = k_0 \cdot e^{1.4c - 0.125n} < 20\% \cdot k_0 \cdot e^{1.4c}$, 化简得 $e^{-0.125n} < \frac{1}{5}$, 则 $n > 8 \ln 5 \approx 12.9$, 又因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 n 的最小值为 13. 故选 D.

6.B 【解析】由题意得 $f'(x) = (x+1)e^x$, 过点 $(2, 0)$ 作曲线 $f(x) = xe^x$ 的两条切线, 设切点坐标为 $(x_0, x_0e^{x_0})$,

则 $(x_0+1)e^{x_0} = \frac{x_0e^{x_0}}{x_0-2}$, 即 $(x_0^2 - 2x_0 - 2)e^{x_0} = 0$, 由于 $e^{x_0} > 0$, 故 $x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0, \Delta = 12 > 0$, 由题意可知 x_1, x_2

为 $x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0$ 的两个解, 则 $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = -2$, 故 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -1$, 故选 B.

7.C 【解析】该数列的一阶商数列为 $2, 4, 8, 16, \dots$, 则二阶商数列为 $2, 2, 2, \dots$, 因为二阶商数列是常数列, 故二阶商数列后面的项均为 2, 所以一阶商数列后面的项依次为 $2^5, 2^6, 2^7, \dots$, 从而原数列后面的项依次为 $2^{15}, 2^{21}, \dots$, 故 $A_7 = 2^{21}$. 故选 C.

8.A 【解析】 $f'(x) = e^x - e^{-x}$, 由题意知当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需比较 $\frac{1}{5}$,

$\sin \frac{1}{5}, \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right)$ 的大小. 当 $x > 0$ 时, $x > \sin x$, 则 $\sin \frac{1}{5} < \frac{1}{5}$, 所以 $a > b$; 令 $g(x) = \sin x - \ln(1+x), x \in$

$\left(0, \frac{1}{3}\right)$, 则 $g'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}$, 令 $\varphi(x) = g'(x), x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, 则 $\varphi'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上

单调递减, 可得 $\varphi'(x) > \varphi'\left(\frac{1}{3}\right) = -\sin \frac{1}{3} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} > -\frac{1}{3} + \frac{9}{16} = \frac{11}{48} > 0$, 即 $\varphi'(x) > 0$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上恒成

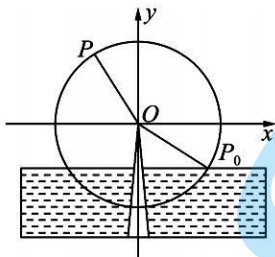
立, 则 $\varphi(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上单调递增, 可得 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, 即 $g'(x) > 0$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上恒成立, 可知 $g(x)$ 在

区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上单调递增, 则 $g(x) > g(0) = 0$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上恒成立, 令 $x = \frac{1}{5} \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, 则 $g\left(\frac{1}{5}\right) = \sin \frac{1}{5} -$

$\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)>0$, 即 $\sin\frac{1}{5}>\ln\frac{6}{5}$, 所以 $b>c$. 综上所述, $c<b<a$. 故选 A.

9. BCD 【解析】对于 A, 正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 即有 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, 可得 $0<ab\leq\frac{1}{4}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}\geq 4$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 所以当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 4, 无最大值, 所以 A 错误; 对于 B, 由选项 A 可知, $0<\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 B 正确; 对于 C, $\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)\leq-2$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, C 正确; 对于 D, $2^a+2^b\geq 2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, D 正确. 故选 BCD.

10. ACD 【解析】以 O 为坐标原点建立直角坐标系, 如下图, 设点 P 距离水面的高度 h (m) 与时间 t (s) 的函数解析式为 $h=f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$ ($A>0, \omega>0, |\varphi|<\pi$), 由题意知: $f(t)_{\max}=3, f(t)_{\min}=-1$, 最小正周期 $T=60$, $\therefore A=2, B=1, \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$, $\therefore f(0)=2\sin\varphi+1=0$, 即 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$, 又由 $|\varphi|<\pi$ 及题意, $\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$, $\therefore f(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1$. 对于 A, 令 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $t=20$, 即点 P 第一次到达最高点需要 20 秒, A 正确; 对于 B, 令 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$, 解得 $t=50$, B 错误; 对于 C, 令 $2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1<0$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}$, $\therefore\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$, 解得 $40<t<60$, 所以水轮转动一圈内, 点 P 在水面下方的时间为 $60-40=20$ 秒, C 正确; 对于 D, $\therefore f(30)=2\sin\left(\frac{\pi}{30}\times 30-\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin\frac{5\pi}{6}+1=2$, \therefore 当水轮转动 30 秒时, 点 P 距离水面的高度是 2 米, D 正确. 故选 ACD.

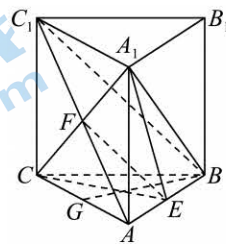


11. ACD 【解析】连接 A_1C 与 AC_1 相交于 F , 连接 EF , 因为 F, E 分别为 AC_1, AB 中点, 所以 $EF\parallel BC_1$, 因为 $EF\subset$ 平面 $A_1EC, BC_1\not\subset$ 平面 A_1EC , 所以 $BC_1\parallel$ 平面 A_1EC , 故选项 A 正确. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1A\perp$ 平面 ABC , 又因为 $CE\subset$ 平面 ABC , 则 $A_1A\perp CE$. 又 $AB\perp CE, AA_1\cap AB=A, AA_1\subset$ 平面 $AA_1B_1B, AB\subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $CE\perp$ 平面 AA_1B_1B . 又因为 $EA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B , 则 $A_1E\perp CE$, 又 $AB\perp CE$, 可知二面角 A_1-EC-A 的平面角为 $\angle A_1EA$, 则 $\sin\angle A_1EA=\frac{AA_1}{A_1E}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故选项 B 错误. 设点 A 到平面 A_1BC_1 的距离为 d , 取 AC 中点 G , 连接 BG , 则 $V_{B-AA_1C_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AA_1C_1}\times BG=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BA_1C_1}\times d$, 又 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}AA_1\cdot A_1C_1=\frac{1}{2}, BG=\frac{\sqrt{3}}{2}, BA_1=BC_1=\sqrt{2}, A_1C_1=1$, 由余弦定理可得 $\cos\angle A_1BC_1=\frac{3}{4}$, 所以 $\sin\angle A_1BC_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$, 所以

$$S_{\triangle A_1BC_1} = \frac{1}{2} A_1B \times BC_1 \times \sin \angle A_1BC_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}. \text{ 所以 } d = \frac{S_{\triangle AA_1C_1} \cdot BG}{S_{\triangle A_1BC_1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 故选项 C 正确. 设 } \triangle ABC \text{ 外接}$$

圆半径为 r , 由正弦定理得 $2r = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 所以 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 又设三棱柱外接球半径为 R , 则三棱柱外接球与以 $\triangle ABC$ 和

$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆为底面的圆柱外接球相同, 则 $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2}BB_1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$. 故选项 D 正确. 故选 ACD.



12. ABC 【解析】因为 $f(x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+1) = f(x+1)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故选项 A 正确; 因为 $f(-x+1) = f(x+1)$, 所以 $f(-x) = f(x+2)$, 又因为 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2)$, 所以 $f(-x) = f(-x+2)$, 所以 $f(x) = f(x+2)$, 所以 2 为 $f(x)$ 的一个周期, 故选项 B 正确; 因为 $f(x+2) = f(-x+2)$, 所以 $f'(x+2) = -f'(-x+2)$, 所以 $f'(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 中心对称, 故选项 C 正确; 因为 2 为 $f(x)$ 的一个周期, 又因为 $f(x+2) = f(-x+2)$, 所以 $f(x) = f(-x)$, 所以 $f'(x) = -f'(-x)$, 所以 $f'(x)$ 为奇函数, 故选项 D 错误. 故选 ABC.

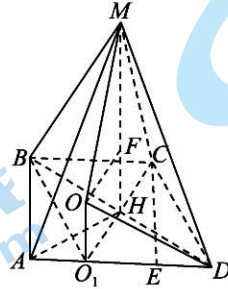
13.1 【解析】由题意可得: $f(-5) = f(-3) = f(-1) = f(1) = \log_2 2 = 1$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由 $1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ} = \frac{1}{\cos \alpha}$, 得 $\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} + \frac{\sqrt{3} \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2} \sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 80^\circ\right)}{\sin 80^\circ} = \frac{2 \sin(80^\circ + 60^\circ)}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2 \sin 140^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{1}{\cos 40^\circ} = \frac{1}{\cos \alpha}$, 则 $\cos \alpha = \cos 40^\circ$, $\therefore \alpha$ 是锐角, $\therefore \alpha = 40^\circ$. 则 $\sin(\alpha + 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $\frac{1}{2024}$ 【解析】根据题意可得 $\{a_n\}$ 各项均不为 0, 则 $a_n - a_{n+1} = a_{n+1} a_n$, 则 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$, 故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列, 则 $\frac{1}{a_n} = n + 1, a_n = \frac{1}{n+1}$, 故 $a_{2023} = \frac{1}{2024}$.

16. 20π 【解析】如图, 取 AD 的两个三等分点 O_1, E , 连接 BD, O_1C, CE , 设 $BD \cap O_1C = H$, 连接 MH, AH , 则 $AO_1 = \frac{1}{3}AD = 1, \therefore O_1D = BC = 2$, 又 $\because BC \parallel AD, \therefore BC \parallel O_1D$, 所以, 四边形 $BCDO_1$ 为平行四边形. $\therefore O_1C \cap BD = H, \therefore H$ 为 BD 的中点, 所以在 $Rt\triangle ABD$ 中, $AH = BH = DH = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$, 由勾股定理可得 $O_1B = \sqrt{AO_1^2 + AH^2} = 2$, 则 $O_1B = O_1D$, 在 $Rt\triangle O_1AB$ 中, $\tan \angle AO_1B = \frac{AB}{AO_1} = \sqrt{3}, \therefore \angle AO_1B = \frac{\pi}{3}, \therefore BC \parallel AD, \therefore \angle CBO_1 = \frac{\pi}{3}$, 又 $BC = O_1D = O_1B$, 则 $\triangle O_1BC$ 为等边三角形, $\therefore O_1C = O_1B = O_1D = 2$, 则 O_1 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心. 因为 $MA = MB = MD = 2\sqrt{3}, H$ 为 BD 的中点, $\therefore MH \perp BD, \therefore MA = MB, AH = BH, MH =$

MH , $\therefore \triangle MAH \cong \triangle MBH$, $\therefore \angle MHA = \angle MHB = \frac{\pi}{2}$, $\therefore MH \perp AH$, 又 $\because MH \perp BD, AH \cap BD = H$, $\therefore MH \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $MH = \sqrt{MA^2 - AH^2} = 3$. 设 O 为三棱锥 $M-BCD$ 外接球的球心, 连接 OO_1, OM, OD , 则 $OO_1 \parallel MH$, 过 O 作 $OF \perp MH$, 垂足为 F , 则外接球的半径 R 满足 $R^2 = OO_1^2 + 2^2 = (3 - OO_1)^2 + O_1H^2$, 设 $OO_1 = x$, 又 $O_1H = \frac{1}{2}O_1C = 1$, 解得 $x = 1$, 从而 $R^2 = x^2 + 2^2 = 5$, 故三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 20\pi$.



17. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} 9a_1 + 36d = -99, \\ 4a_1 + 6d = 16a_1 + 120d, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a_1 = -19, \\ d = 2, \end{cases}$ 4 分

故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 21$ 5 分

(2) 由 (1) 可知, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2 - 20n = (n-10)^2 - 100$ 7 分

当 $n = 10$ 时, S_n 取得最小值 -100 8 分

由 $S_m \leq S_n + 1$ 恒成立, 得 $m^2 - 20m + 99 \leq 0$, 解得 $9 \leq m \leq 11$.

因为 $m \in \mathbf{N}^*$, 所以 m 的最大值为 11 10 分

18. 解: (1) 因为 $\mathbf{m} = \left(2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \sqrt{3} \right)$, $\mathbf{n} = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right)$,

所以 $f(x) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
 $= 1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 3 分

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 5 分

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$ 6 分

(2) 由 $f(\omega x) = 1$, 得 $2\sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 1$, 则 $\sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 7 分

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, 得 $-\frac{\pi}{3} \leq 2\omega x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$, 9 分

因为 $f(\omega x) = 1 (\omega > 0)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$ 上有唯一解,

所以 $0 \leq \frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3} < \pi$, 11 分

得 $\frac{1}{2} \leq \omega < 2$ 12分

19.解:(1)函数 $f(x) = x^3 + \frac{3m}{2}x^2 - 3x + 2$, 求导得 $f'(x) = 3x^2 + 3mx - 3$ 1分

令 $3x^2 + 3mx - 3 < 0$ 得 $\frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} < x < \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}$,

若 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 存在单调递减区间, 3分

$\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} > \frac{1}{2}$, 4分

解得 $m < \frac{3}{2}$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 5分

(2)由 $f'(x) = 0$, 即 $x^2 + mx - 1 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}, x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}$ 6分

当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 8分

因此函数 $f(x)$ 在 x_2 处取得极小值, 于是 $\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} > m$, 即 $\sqrt{m^2 + 4} > 3m$, 当 $m \leq 0$ 时, 不等式恒成立;

..... 10分

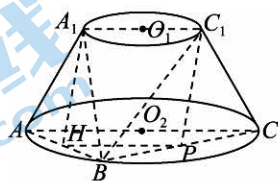
当 $m > 0$ 时, 解得 $0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 11分

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 12分

20.解:(1)存在, BC 中点即为所求. 1分

证明如下: 取 BC 中点 P , 连接 C_1P , 取 AB 中点 H , 连接 A_1H, PH , 则有 $PH \parallel AC, PH = \frac{1}{2}AC$ 2分

如图, 在等腰梯形 A_1ACC_1 中, $AC \parallel A_1C_1, AC = 2A_1C_1$, 所以 $HP \parallel A_1C_1, HP = A_1C_1$, 则四边形 A_1C_1PH 为平行四边形, 所以 $C_1P \parallel A_1H$ 4分



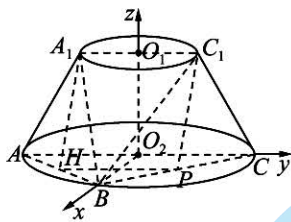
又 $A_1H \subset$ 平面 $A_1AB, C_1P \subset$ 平面 A_1AB , 所以 $C_1P \parallel$ 平面 A_1AB 5分

(2)过点 B 作 $BO' \perp AC$ 于 O' , 在等腰梯形 A_1ACC_1 中, $AC = 2AA_1 = 2A_1C_1 = 4$, 所以该梯形的高 $h = \sqrt{3}$, 6分

所以等腰梯形 A_1ACC_1 的面积为 $S = 3\sqrt{3}$, 所以四棱锥 $B - A_1ACC_1$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S \times BO' = 2\sqrt{3}$, 解得 $BO' =$

2, 所以点 O' 与 O_2 重合. 7分

以 O_2 为原点, $\overrightarrow{O_2B}, \overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2O_1}$ 方向为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $C(0, 2, 0), B(2, 0, 0), A(0, -2, 0), A_1(0, -1, \sqrt{3}), C_1(0, 1, \sqrt{3}),$
 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{CC_1} = (0, -1, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0), \dots$ 9分

设平面 A_1AB 的一个法向量为 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1),$

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{a} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ 2x_1 + 2y_1 = 0, \end{cases}$ 取 $z_1 = 1,$ 则 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1).$ 10分

设平面 C_1CB 的一个法向量为 $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2),$

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{b} = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{b} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ -2x_2 + 2y_2 = 0, \end{cases}$ 取 $z_2 = 1,$ 则 $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1).$ 11分

设平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角为 $\alpha,$

则 $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{|3 - 3 + 1|}{\sqrt{3+3+1} \times \sqrt{3+3+1}} = \frac{1}{7}.$

故平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}.$ 12分

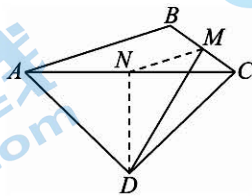
21.解:(1)在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \frac{2\pi}{3} = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7.$ 2分

取 AC 中点 $N,$ 连接 $DN, MN.$

$\because AD = CD, AD \perp CD, N$ 为 AC 的中点,

$\therefore DN \perp AC, DN = \frac{1}{2}AC.$ 4分

则 $\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times AC \times DN = \frac{1}{4}AC^2 = \frac{7}{4}.$ 5分



(2) 设 $\angle ABC = \alpha, \angle BAC = \beta,$

$\because M, N$ 分别为边 BC, AC 的中点,

$\therefore MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2}AB = 1, \angle MNC = \angle BAC = \beta.$ 6分

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha = 5 - 4\cos \alpha.$ 7分

由正弦定理 $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta},$

得 $\sin \beta = \frac{BC \cdot \sin \alpha}{AC} = \frac{\sin \alpha}{AC}$ 8分

在 $\triangle MDN$ 中, $\cos \angle MND = \cos(\angle MNC + \angle CND) = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \beta$,

由余弦定理, 得 $DM^2 = MN^2 + DN^2 - 2MN \cdot DN \cdot \cos \angle MND$

$$= 1 + \frac{1}{4}AC^2 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2}AC \times \sin \beta$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \times (5 - 4\cos \alpha) + 2 \times 1 \times \frac{1}{2}AC \times \frac{\sin \alpha}{AC}$$

$$= \frac{9}{4} - \cos \alpha + \sin \alpha, \dots\dots\dots 9分$$

$$= \frac{9}{4} + \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{其中 } 0 < \alpha < \pi$$

当 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ 时, DM 有最大值:

$$\sqrt{\frac{9}{4} + \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{2} + 1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2}.$$

$\therefore DM$ 长度的最大值为 $\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}$ 12分

22.(1) 证明: $f(x) = x(a \ln x - x - 1) = ax \ln x - x^2 - x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \ln x - 2x$ 1分

设 $g(x) = \ln x - 2x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1 - 2x}{x}$,

由 $g(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

$\therefore g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - 1 = -\ln 2 - 1 < 0$, 3分

$\therefore g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 4分

(2)(i) 解: 由题意知 $a \neq 0$, 由 $f(x) + x = 0$, 得 $ax \ln x - x^2 = 0 \Rightarrow a \ln x = x \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{a}$,

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

由 $h'(x) = 0$, 得 $x = e$,

当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递减,

$\therefore h(x)$ 有极大值, 也是最大值, $h(e) = \frac{1}{e}$ 6分

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) > 0, h(x) \rightarrow 0$,

所以要使 $f(x) + x = 0$ 有两个不同的实数根 x_1, x_2 , 则 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{e}$,

即 $a > e$, 即实数 a 的取值范围为 $(e, +\infty)$ 8 分

(ii) 证明: 由 (i) 不妨设 $x_1 > e > x_2 > 0$,

由 $f(x_1) + x_1 = 0, f(x_2) + x_2 = 0$, 得 $x_1 = a \ln x_1, x_2 = a \ln x_2$,

则 $x_1 - x_2 = a(\ln x_1 - \ln x_2)$,

要证 $x_1 \cdot x_2 > e^2$, 即证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 等价于 $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} > 2$,

而 $\frac{1}{a} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$, 等价于证明 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$,

即证 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$,

令 $t = \frac{x_1}{x_2}, t > 1$,

要证 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$, 即证 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 10 分

令 $\varphi(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$,

则 $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0 (t > 1)$,

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 11 分

所以 $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, 即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$,

所以 $x_1 \cdot x_2 > e^2$ 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

