

东城区 2017—2018 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学(理科)

2018.1

本试卷共 4 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

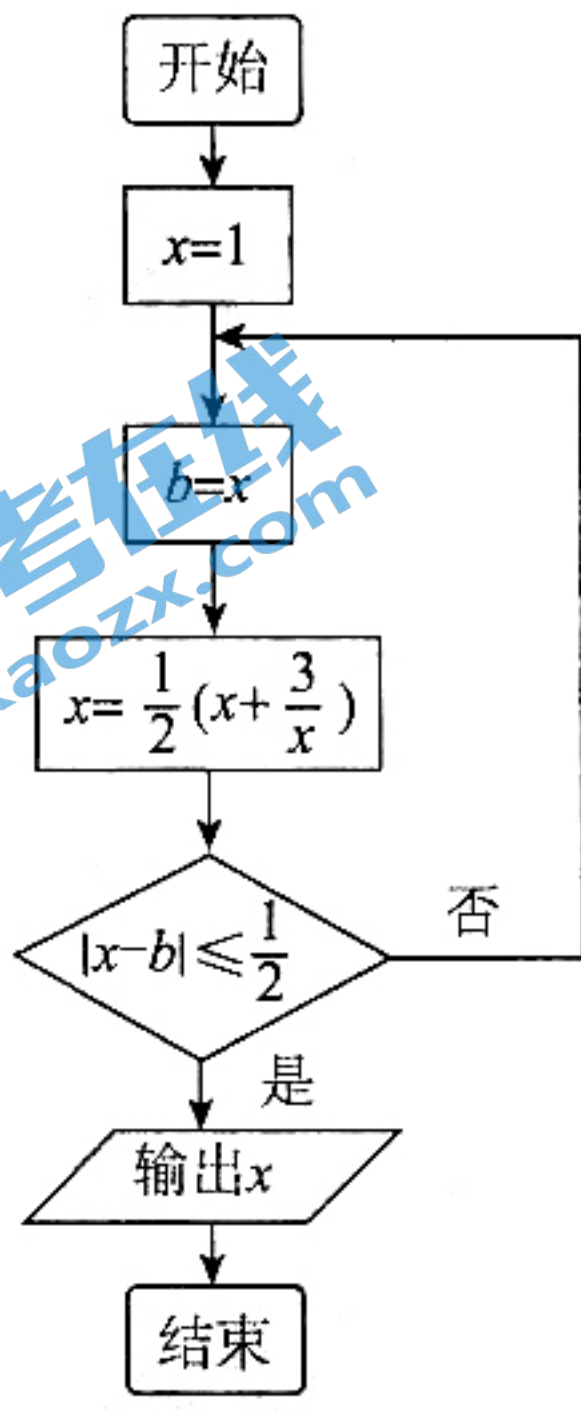
第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 若集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{-2, 3\}$ B. $\{-2, -1, 2, 3\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离是
 A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

3. 执行如图所示的程序框图,输出的 x 值为
 A. 1
 B. 2
 C. $\frac{3}{2}$
 D. $\frac{7}{4}$



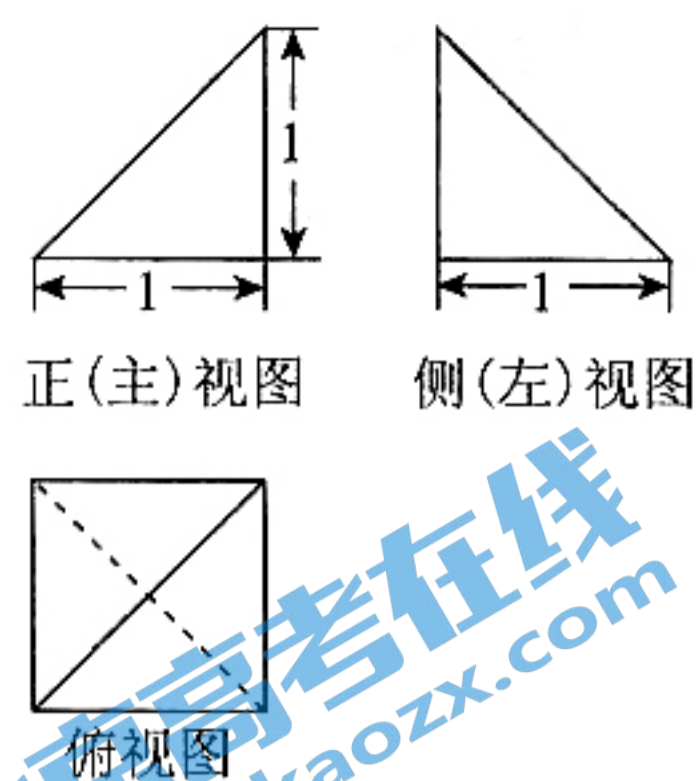
4. 若 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq 2x, \\ x + y \geq 3, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则 $x - y$ 的最小值为
 A. -5
 B. -3
 C. -2
 D. -1

5. 已知函数 $f(x) = \frac{4^x + 1}{2^x}$, 则 $f(x)$ 的
 A. 图象关于原点对称,且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数
 B. 图象关于 y 轴对称,且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数
 C. 图象关于原点对称,且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数
 D. 图象关于 y 轴对称,且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数

6. 设 a, b 为非零向量,则“ $|a+b| = |a-b|$ ”是“ $a \cdot b = 0$ ”的
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为

- A. $\frac{1}{6}$
 B. $\frac{1}{3}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. 1



8. 现有 n 个小球, 甲、乙两位同学轮流且不放回抓球, 每次最少抓 1 个球, 最多抓 3 个球, 规定谁抓到最后一个球谁赢. 如果甲先抓, 那么以下推断正确的是

- A. 若 $n=4$, 则甲有必赢的策略
 B. 若 $n=6$, 则乙有必赢的策略
 C. 若 $n=9$, 则甲有必赢的策略
 D. 若 $n=11$, 则乙有必赢的策略

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

9. 若复数 $(1+i)(a-i)$ 为纯虚数, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 在 $(1+2x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1=6, a_4+a_6=4$, 则 $S_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 在极坐标系中, 若点 $A(m, \frac{\pi}{3}) (m > 0)$ 在圆 $\rho = 2\cos \theta$ 外, 则 m 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一个焦点到它的一条渐近线的距离为 1, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$;
 若双曲线 C_1 与 C 不同, 且与 C 有相同的渐近线, 则 C_1 的方程可以为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
 (写出一个答案即可)
14. 如图 1, 分别以等边三角形 ABC 的每个顶点为圆心、以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形 ABC 称为勒洛三角形 ABC , 等边三角形的中心 P 称为勒洛三角形的中心. 如图 2, 勒洛三角形 ABC 夹在直线 $y=0$ 和直线 $y=2$ 之间, 且沿 x 轴滚动, 设其中心 $P(x, y)$ 的轨迹方程为 $y=f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\underline{\hspace{2cm}}$;
 对 $y=f(x)$ 的图象与性质有以下描述:
 ①中心对称图形; ②轴对称图形; ③一条直线; ④最大值与最小值的和为 2.
 其中正确结论的序号为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (注: 请写出所有正确结论的序号)

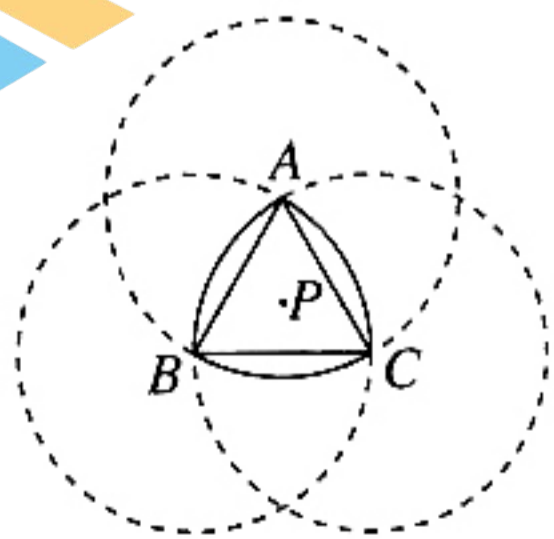


图 1

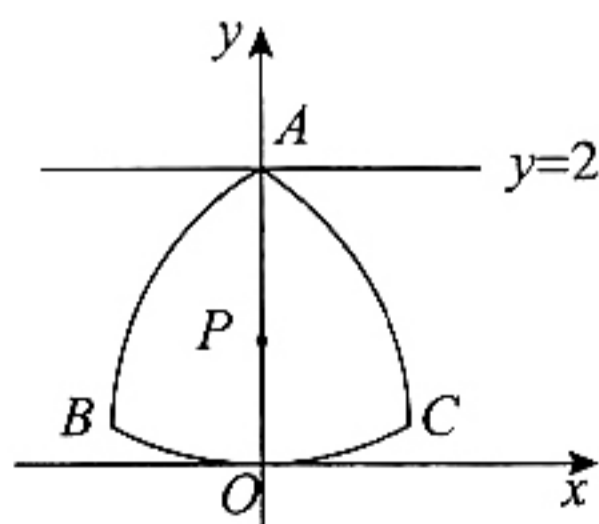


图 2

三、解答题共 6 小题,共 80 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

15. (本题满分 13 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $a=2, 2\sin A=\sin C$.

(I)求 c 的长;

(II)若 $\cos 2C=-\frac{1}{4}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (本题满分 13 分)

中国特色社会主义进入新时代,我国经济已由高速增长阶段转向高质量发展阶段. 货币政策是宏观经济调控的重要手段之一,对我国经济平稳运行、高质量发展发挥着越来越重要的作用. 某数学课外活动小组为了研究人民币对某国货币的汇率与我国经济发展的关系,统计了 2017 年下半年某周五个工作日人民币对该国货币汇率的开盘价和收盘价,如下表:

	周一	周二	周三	周四	周五
开盘价	164	165	170	172	a
收盘价	164	164	169	173	170

(I)已知这 5 天开盘价的中位数与收盘价的中位数相同,求 a 的值;

(II)在(I)的条件下,从这 5 天中随机选取 3 天,其中开盘价比当日收盘价低的天数记为 ξ ,求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$;

(III)在下一周的第一个工作日,收盘价为何值时,这 6 天收盘价的方差最小.(只需写出结论)

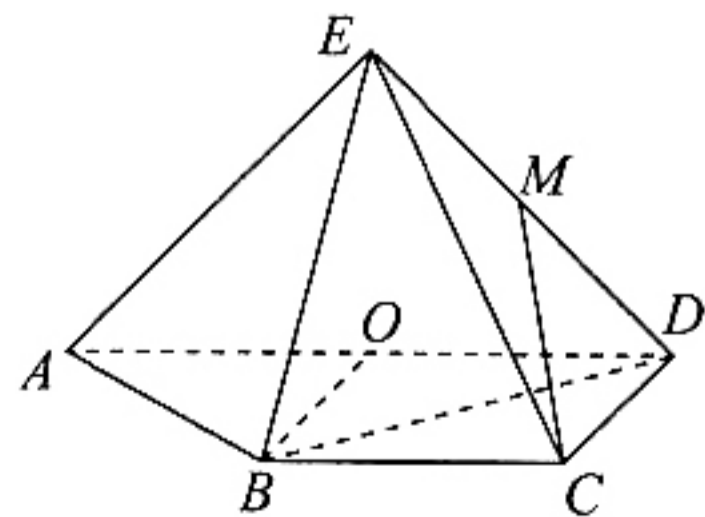
17. (本题满分 14 分)

如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中,平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$, O, M 分别为线段 AD, DE 的中点,四边形 $BCDO$ 是边长为 1 的正方形, $AE=DE, AE\perp DE$.

(I)求证: $CM\parallel$ 平面 ABE ;

(II)求直线 DE 与平面 ABE 所成角的正弦值;

(III)点 N 在直线 AD 上,若平面 $BMN\perp$ 平面 ABE ,求线段 AN 的长.



18. (本题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x - x \ln x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

扫描二维码, 获取更多期末试题

(II) 若 $f(x) < a$ 对 $x \in (\frac{1}{e}, e)$ 恒成立, 求 a 的最小值.



长按识别关注

19. (本题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 经过其左焦点 $F(-1, 0)$ 且与 x 轴重合的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) O 为坐标原点, 在 x 轴上是否存在定点 Q , 使得点 F 到直线 QM, QN 的距离总相等? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

20. (本题满分 13 分)

已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 满足 $a_i \in \mathbf{N}^+$ 且 $1 \leq a_i \leq i (i = 1, 2, \dots, n)$, 数列 $B: b_1, b_2, \dots, b_n (n \geq 2)$ 满足 $b_i = \tau(a_i) + 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 其中 $\tau(a_1) = 0, \tau(a_i) (i = 2, 3, \dots, n)$ 表示 a_1, a_2, \dots, a_{i-1} 中与 a_i 不相等的项的个数.

(I) 数列 $A: 1, 1, 2, 3, 4$, 请直接写出数列 B ;

(II) 证明: $b_i \geq a_i (i = 1, 2, \dots, n)$;

(III) 若数列 A 相邻两项均不相等, 且 B 与 A 为同一个数列, 证明: $a_i = i (i = 1, 2, \dots, n)$.