长沙市 2024 年新高考适应性考试

数　　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．请保持答题卡的整洁．考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x\mid x<1\}$，$N=\{x\mid x^2<1\}$，则

A．$M=N$　　B．$M\subseteq N$　　C．$N\subseteq M$　　D．$M\cap N=\varnothing$

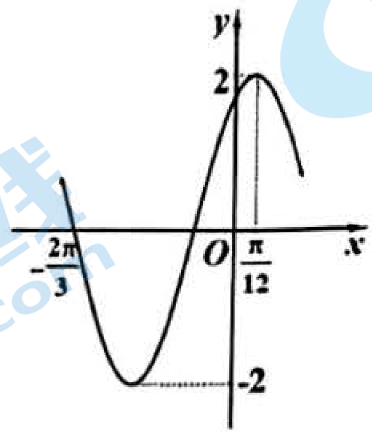
2．复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．若抛物线 $y^2=ax$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，则实数 a 的值为

A．-2　　B．2　　C．-4　　D．4

4．下图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，则该函数的解析式可以是



A．$y=2\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3})$　　B．$y=2\sin(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3})$

C．$y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$　　D．$y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

5. 已知甲盒中有 3 个红球和 2 个黄球，乙盒中有 2 个红球和 1 个黄球. 现从甲盒中随机抽取 1 个球放入乙盒中，搅拌均匀后，再从乙盒中抽取 1 个球，此球恰为红球的概率是

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{9}{20}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{13}{20}$

6. 若 $\tan 2\alpha + 4\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 0$，则 $\sin 2\alpha =$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 已知直线 $y = a$ 与函数 $f(x) = e^x$，$g(x) = \ln x$ 的图象分别相交于 A，B 两点. 设 k_1 为曲线 $y = f(x)$ 在点 A 处切线的斜率，k_2 为曲线 $y = g(x)$ 在点 B 处切线的斜率，则 k_1k_2 的最大值为

A. $\frac{1}{e}$　　B. 1　　C. e　　D. e^e

8. 在平面四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AD，BC 的中点. 若 $AB = 2$，$CD = 3$，且 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$，则 $|\overrightarrow{EF}| =$

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{42}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列函数中，是奇函数的是

A. $y = e^x - e^{-x}$　　B. $y = x^3 - x^2$　　C. $y = \tan 2x$　　D. $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$

10. 某彗星的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 测得轨道的近日点（距离太阳最近的点）与太阳中心的距离为 d_1，远日点（距离太阳最远的点）与太阳中心的距离为 d_2，并且近日点、远日点及太阳中心在同一条直线上，则

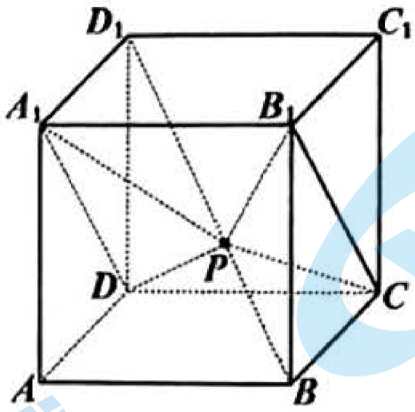
A. 轨道的焦距为 $d_2 + d_1$

B. 轨道的离心率为 $\frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}$

C. 轨道的短轴长为 $2\sqrt{d_1 d_2}$

D. 当 $\frac{d_1}{d_2}$ 越大时，轨道越扁

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为线段 BD_1 上的动点，直线 m 为平面 A_1DP 与平面 B_1CP 的交线，则



A. 存在点 P，使得 $BB_1 \parallel$ 面 A_1DP

B. 存在点 P，使得 $B_1P \perp$ 面 A_1DP

C. 当点 P 不是 BD_1 的中点时，都有 $m \parallel$ 面 A_1B_1CD

D. 当点 P 不是 BD_1 的中点时，都有 $m \perp$ 面 ABD_1

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项积为 T_n，下列说法正确的是

A. 若 $T_8=T_{12}$，则 $a_{10}a_{11}=1$

B. 若 $T_8=T_{12}$，则 $T_{20}=1$

C. 若 $a_1=1024$，且 T_{10} 为数列 $\{T_n\}$ 的唯一最大项，则 $(\frac{1}{2})^{\frac{10}{9}}<q<\frac{1}{2}$

D. 若 $a_1>0$，且 $T_{10}>T_{11}>T_9$，则使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 20

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知随机变量 X 的分布列如下：

X	1	2	3
P	0.1	0.7	0.2

则数学期望 $E(X)=$__________.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，且 $f(2)=1$，则不等式 $f(x)>5-2x$ 的解集为__________.

15. 已知 $A(4,1)$，$B(2,2)$，$C(0,3)$，若在圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上存在点 P 满足 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=13$，则实数 r 的取值范围是__________.

16. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点均在球 O 的表面上．若正四棱锥的体积为 1，则球 O 体积的最小值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （本题满分 10 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}-3a_n=2n-1$，且 $a_1=1$．

（1）证明：数列 $\{a_n+n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

18. （本题满分 12 分）如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=2\sqrt{3}$，将 $\triangle ABD$ 沿矩形的对角线 BD 进行翻折，得到如图 2 所示的三棱锥 $A-BCD$．

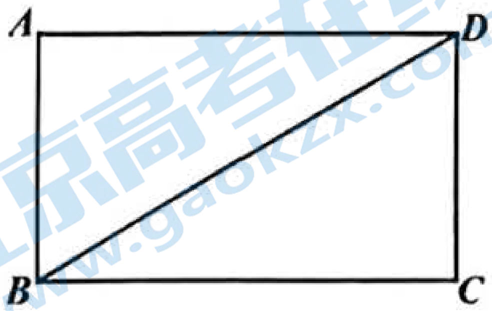


图 1

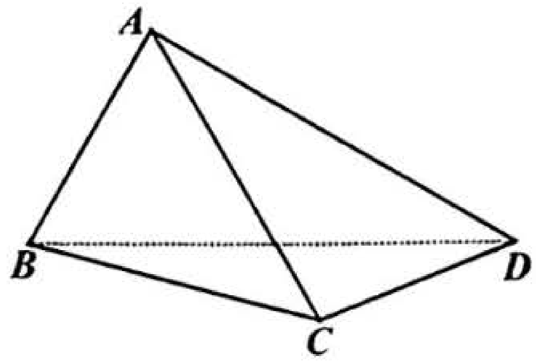


图 2

（1）当 $AB\perp CD$ 时，求 AC 的长；

（2）当平面 $ABD\perp$ 平面 BCD 时，求平面 ABC 和平面 ACD 的夹角的余弦值．

19. （本题满分 12 分）某厂为了考察设备更新后的产品优质率，质检部门根据有放回简单随机抽样得到的样本测试数据，制作了如下列联表：

产品	优质品	非优质品
更新前	24	16
更新后	48	12

（1）依据小概率值 $\alpha=0.050$ 的独立性检验，分析设备更新后能否提高产品优质率？

（2）如果以这次测试中设备更新后的优质品频率作为更新后产品的优质率．质检部门再次从设备更新后的生产线中抽出 5 件产品进行核查，核查方案为：若这 5 件产品中至少有 3 件是优质品，则认为设备更新成功，提高了优质率；否则认为设备更新失败．

①求经核查认定设备更新失败的概率 p；

②根据 p 的大小解释核查方案是否合理．

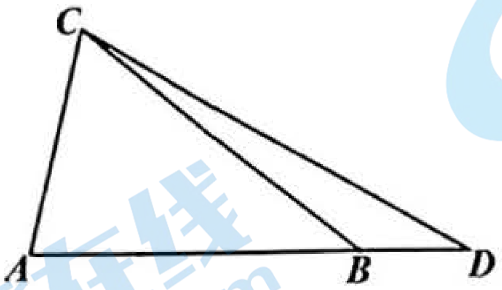
附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\geq x_\alpha)$	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

20．（本题满分 12 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c，且满足 $\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$．

（1）证明：$a^2-b^2=bc$；

（2）如图，点 D 在线段 AB 的延长线上，且 $|AB|=3$，$|BD|=1$，当点 C 运动时，探究 $|CD|-|CA|$ 是否为定值？



21．（本题满分 12 分）已知函数 $f(x)=ax\ln x-x^2+1$．

（1）若 $f(x)$ 有且仅有一个零点，求实数 a 的取值范围；

（2）证明：$(\ln 2)^2+(\ln\frac{3}{2})^2+(\ln\frac{4}{3})^2+\cdots+(\ln\frac{n+1}{n})^2<1$．

22．（本题满分 12 分）已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 与直线 $l: y=kx+m(k\neq\pm\sqrt{3})$ 有唯一的公共点 P，直线 l 与双曲线的两条渐近线分别交于 M,N 两点，其中点 M，P 在第一象限．

（1）探求参数 k,m 满足的关系式；

（2）若 O 为坐标原点，F 为双曲线的左焦点，证明：$\angle MFP=\angle NFO$．