

# 北京市八一学校 2020~2021 学年度第二学期期末考试

高二数学

2021.07.05

制卷人 王男

审卷人 王明辉

一. 选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合  $A = \{x | 1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | -1 < x < 2\}$ , 则  $A \cap B = ( )$

A.  $\{x | -1 < x < 3\}$

B.  $\{x | -1 < x < 1\}$

C.  $\{x | 1 < x < 2\}$

D.  $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 下列函数中, 值域为  $[0, +\infty)$  的是 ( )

A.  $y = 2^x$

B.  $y = x^2$

C.  $y = \tan x$

D.  $y = \cos x$

3. 实数  $a, b, c$  在数轴上对应的点如图所示, 则下列式子中正确的是 ( )

A.  $a + c < b + c$

B.  $a - c > b - c$



C.  $ac > bc$

D.  $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$

4. 已知  $a = 3^{-2}$ ,  $b = \log_0.2 2$ ,  $c = \log_2 3$ , 则 ( )

A.  $a > b > c$

B.  $a > c > b$

C.  $b > c > a$

D.  $c > a > b$

5. 已知  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ , 则  $f(x) > 0$  的解集是 ( )

A.  $(-1, 0)$

B.  $(0, 1)$

C.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

D.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

6. 某学习小组有 3 名男生和 2 名女生, 现从该小组中先后随机抽取两名同学进行成果展示, 则在抽到第 1 个同学是男生的条件下, 抽到第 2 个同学也是男生的概率为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$

B.  $\frac{3}{10}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{2}{5}$

7. “ $\ln a > \ln b$ ”是“ $3^a > 3^b$ ”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知曲线: ①  $y^2 = x$  ②  $x^2 + y^2 = 1$  ③  $y = x^3$  ④  $x^2 - y^2 = 1$ . 上述四条曲线中, 满足: “若曲线与直线有且仅有一个公共点, 则它们必相切”的曲线条数是( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0. \end{cases}$  下列三个结论中, 正确结论的个数是( )

- ① 当  $a = -2$  时, 函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $(-\infty, 1)$ ;  
 ② 若函数  $f(x)$  无最小值, 则  $a$  的取值范围为  $(0, +\infty)$ ;  
 ③ 若  $a < 1$  且  $a \neq 0$ , 则  $\exists b \in \mathbb{R}$ , 使得函数  $y = f(x) - b$  恰有 3 个零点  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 x_2 x_3 = -1$ .

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

10. 已知函数  $f(x)$  在定义域  $(0, +\infty)$  上是单调函数, 若对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 都有  $f[f(x) - \frac{1}{x}] = 2$ , 则  $f(\frac{1}{5})$  的值是( )

- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

二. 填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 3x^2 - 4, & x > 0 \end{cases}$ , 那么  $f(f(-2)) =$  \_\_\_\_\_.

12.  $(2x + \frac{1}{x})^4$  展开式的常数项是\_\_\_\_\_. (用数字作答)

13. 小明计划周六去天津参加会议, 有飞机和火车两种交通工具可供选择, 它们能准时到达的概率分别为 0.95、0.8, 若当天天晴则乘飞机, 否则乘火车, 天气预报显示当天天晴的概率为 0.8. 则小明能准时到达的概率为\_\_\_\_\_.

14. 不等式  $\frac{x-1}{\ln x} > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

15. 已知集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}^*,$  且  $n > 2, T_n = \{x | x = a_i + a_j, a_i \in A, a_j \in A, 1 \leq i < j \leq n\}.$

用  $\text{card}(T_n)$  表示集合  $T_n$  中元素的个数.

① 若  $A = \{2, 4, 8, 16\}$ , 则  $\text{card}(T_4) =$  \_\_\_\_\_.

② 若  $a_{i+1} - a_i = c (1 \leq i \leq n-1, c$  为常数), 则  $\text{card}(T_n) =$  \_\_\_\_\_.

三. 解答题:本大题共 4 小题,共 40 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

16. (本小题 9 分)

甲、乙两人轮流投篮,每人每次投一球. 约定甲先投且先投中者获胜,一直到有人获胜或每人都投球 3 次时投篮结束. 设甲每次投篮投中的概率为  $\frac{1}{3}$ , 乙每次投篮投中的概率为  $\frac{1}{2}$ , 且各次投篮互不影响.

(I) 求甲获胜的概率;

(II) 求投篮结束时甲的投球次数  $\xi$  的分布列与期望.

17. (本小题 10 分)

已知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ,  $g(x) = ax^2 - 4$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的极值;

(II) 若对任意的  $x \in [0, +\infty)$ , 都有  $f(x) \geq g(x)$ , 求实数  $a$  的取值范围.

18. (本小题9分)

某社区超市购进了A, B, C, D四种新产品, 为了解新产品的销售情况, 该超市随机调查了15位顾客(记为 $a_l, l=1, 2, 3, \dots, 15$ )购买这四种新产品的情况, 记录如下(单位: 件):

顾客	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$
A	1			1				1			1			1	
B		1		1		1		1	1		1		1		1
C	1			1	1			1		1		1			1
D		1		1		1	1			1			1		

- (I) 若该超市每天的客流量约为300人次, 一个月按30天计算, 试估计产品A的月销售量(单位: 件);
- (II) 为推广新产品, 超市向购买两种以上(含两种)新产品的顾客赠送2元电子红包. 现有甲、乙、丙三人在该超市购物, 记他们获得的电子红包的总金额为 $X$ , 求随机变量 $X$ 的分布列和数学期望;
- (III) 若某顾客已选中产品B, 为提高超市销售业绩, 应该向其推荐哪种新产品?(直接写出结果)

19. (本小题12分)

已知函数  $f(x) = x^2 - a \ln x - x$ , 其中常数  $a \neq 0$ .

- (I) 若函数  $f(x)$  为单调函数, 求实数  $a$  的最大值;
- (II) 如果函数  $f(x)$  只有一个零点, 求实数  $a$  的取值范围.