高一第一学期期末试卷

数学

（清华附中高 21 级）　　2022.01.

命题人：周俊　　审题人：张小英

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若集合 $A=\{x\,|\,x-2<0\}$，$B=\{x\,|\,\mathrm{e}^x>1\}$，则 $A\cap B=$　（　　）

A．$\mathbf{R}$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(0,2)$　　D．$(2,+\infty)$

2．已知命题 p: $\forall a\in(0,+\infty)$，$a+\dfrac{1}{a}>2$，则 $\neg p$ 是（　　）

A．$\exists a\in(0,+\infty)$，$a+\dfrac{1}{a}>2$　　B．$\exists a\notin(0,+\infty)$，$a+\dfrac{1}{a}>2$

C．$\exists a\in(0,+\infty)$，$a+\dfrac{1}{a}\leqslant 2$　　D．$\exists a\notin(0,+\infty)$，$a+\dfrac{1}{a}\leqslant 2$

3．已知 $a=\ln 3$，$b=\log_{0.3}2$，$c=0.3^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为(　　)

A．$a<c<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$c<a<b$

4．下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上为减函数的是(　　)

A．$y=\sin 2x$　　B．$y=2|\cos x|$　　C．$y=-\tan x$　　D．$y=\cos\dfrac{x}{2}$

5．已知 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=10^x$ 的反函数，则 $f^{-1}(1)$ 的值为（　　）

A．0　　B．1　　C．10　　D．100

6．在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，则 $\cos(\pi+\alpha)=$（　　）

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

7．已知实数 α，β，则 “$\alpha=k\pi+\beta$，$k\in\mathbf{Z}$”是“$\sin 2\alpha=\sin 2\beta$”的(　　)

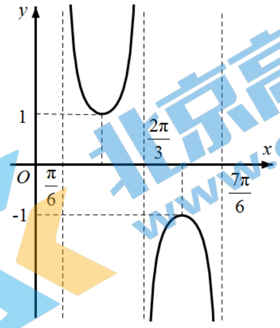
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．已知指数函数 $f(x)=a^x$，将函数 $f(x)$ 的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标扩大为原来的3倍，得到函数 $g(x)$ 的图象，再将 $g(x)$ 的图象向右平移 2 个单位长度，所得图象恰好与函数 $f(x)$ 的图象重合，则 a 的值是(　　)

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

9．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\omega x+\varphi)}$（其中 $\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 ω,φ 的值分别为（　　）



A．2，$\dfrac{\pi}{3}$　　　　B．2，$-\dfrac{\pi}{3}$

C．1，$\dfrac{\pi}{6}$　　　　D．1，$-\dfrac{\pi}{6}$

10．已知函数 $f(x)=1-2^x$，$g(x)=x^2-4x+3$，若存在实数 a,b 使得 $f(a)=g(b)$，则 b 的取值范围是（　　）

A．$\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$　　B．$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$　　C．$[1,3]$　　D．$(1,3)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．已知 $\tan x=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan 2x$ 的值为________． $\dfrac{4}{3}$

12．已知 $x\in[-3,-1]$，则函数 $y=x+\dfrac{4}{x}+2$ 的最大值为________，最小值为________. $-2,-3$

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ e^x+1, & x\le 0\end{cases}$ 且函数 $g(x)=f(x)-m$ 恰有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是

________. $(1,2]$

14．已知 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这 n 个数中最大的数．能够说明“$\forall a,b,c\in\mathbf{R}$，

$\max\{a,b\}+\max\{b,c\}\ge\max\{a,b,c\}$”是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为________. $-1,-2,-3$

15．已知函数 $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})\cos\dfrac{x}{2}$，给出下列四个命题：

①函数 $f(x)$ 是周期函数；

②函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 中心对称；

③函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2\pi$ 轴对称；

④函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$ 上单调递增．

其中，所有正确命题的序号是________． ①②③

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）求下列关于 x 的不等式的解集：

（Ⅰ）$\dfrac{5}{x-7}\geq -1$ ；　　　　（Ⅱ）$2a^2x^2-3ax-2>0$.

解：（1）原不等式等价于$(x-2)(x-7)\geq 0$ 且 $x\neq 7$，所以$x\in(-\infty,2]\cup(7,+\infty)$ 　7 分

（2）$(2ax+1)(ax-2)>0$

$a=0$时，无解；

$a>0$时，解集为$(-\infty,\frac{-1}{2a})\cup\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$

$a<0$时，解集为$(-\infty,\frac{2}{a})\cup\left(\frac{-1}{2a},+\infty\right)$ 　　7 分

17.（本小题 14 分）已知集合 $A=\{x|2^x>4\}, B=\{x||x-a|<2\}$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求 $A\cup B$ 及 $A\cap B$；

（Ⅱ）若集合 $C=\{x|\log_a x<0\}$ 且 $C\subseteq B$，求 a 的取值范围.

解：(1)由题知：$A=\{x|x>2\}$, 　-------2 分

$B=\{x|0<x<4\}$, 　------2 分

$\therefore A\cup B=\{x|x>0\}, A\cap B=\{x|2<x<4\}$ 　--------2 分 　6 分

(2) 由题知：$B=\{x|a-2<x<a+2\}$, --------1 分

①当 $0<a<1$时，$C=\{x|x>1\}$，矛盾，舍去！ -----2 分

②当 $a>1$时，$C=\{x|0<x<1\}$，-----2 分

由于$C\subseteq B$，故$\begin{cases}a-2\leq 0\\ a+2\geq 1\end{cases}$，解得$-1\leq a\leq 2$ 　-------2 分

综上：$a\in(1,2]$ 　----------1 分 　8 分

18.（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos x\sin x+\sin^2 x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间$\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$上的最大值和最小值.

解：（1） $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$，

$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in \mathbf{Z})$

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in \mathbf{Z})$ 8 分

（2）因为 $-\frac{2\pi}{3}\le x\le \frac{\pi}{6}$，所以 $-\frac{7\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le \frac{\pi}{6}$

所以 $-1\le \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le \frac{1}{2}$

故 $-\frac{1}{2}\le \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\le 1$

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 有最大值 1；

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，$x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{2}$. 6 分

19.（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=2x^2+ax+a-1$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=-1$ 上方，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\ge 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1）由题意，$2x^2+ax+a>0$ 恒成立，则 $\Delta=a^2-8a<0\therefore a\in(0,8)$. 6 分

（2）$f(x)$ 对称轴为 $x=-\frac{a}{4}$，

①当 $-\frac{a}{4}\le 0$，即 $a\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $f(x)\ge 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立知，$f(0)=a-1\ge 0\therefore a\in[1,+\infty)$；

②当 $-\frac{a}{4}>0$，即 $a\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{a}{4})$ 上单调递减，

所以 $f(-\frac{a}{4})<f(0)=a-1<0$，与 $f(x)\ge 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立矛盾，

所以 $a\in(-\infty,0)$ 不符合题意，舍；

综上，$a\in[1,+\infty)$. 8 分

20．（本小题 14 分）已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅰ）求 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\beta$ 的值；

（Ⅲ）求 $\alpha-\beta$ 的值.

解：（1）因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，

又因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

又因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\begin{aligned}&\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\\=&\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]\\=&\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\\=&\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\\=&\frac{5\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

5 分

（2）$\sin\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)-1=-\frac{1}{3}$.　　4 分

（3）方法 1：

$$\begin{aligned}\cos\alpha=&\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\\=&\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{4}\\=&\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\=&\frac{\sqrt{2}+4}{6}.\end{aligned}$$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$，而从而$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 于是$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{2}+4}{6}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4-\sqrt{2}}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为$\alpha-\beta\in(0,\pi)$，所以$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

方法 2：由（2）可知$-\sin\beta=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$，

所以$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

因为$0<\frac{\pi}{2}+\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，

所以$\frac{\pi}{2}+\beta=\frac{\pi}{4}+\alpha$，即$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.　　5 分

21.（本小题 15 分）已知函数$f(x)$的定义域为D，若存在实数a，使得对于任意$x_1\in D$，都存在$x_2\in D$满足$\frac{x_1+f(x_2)}{2}=a$，则称函数$f(x)$为“自均值函数”，其中a称为$f(x)$的“自均值数”.

（Ⅰ）判断函数$f(x)=2^x$是否为“自均值函数”，并说明理由；

（Ⅱ）若函数$g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$），$x\in[0,1]$为“自均值函数”，求$\omega$的取值范围；

（Ⅲ）若函数$h(x)=tx^2+2x+3$，$x\in[0,2]$有且仅有 1 个“自均值数”，求实数t的值.

每小问 5 分

解：(1) 不是，理由如下：$f(x)=2^x$定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，

（反证法）假设函数$f(x)=2^x$是“自均值函数”，设其“自均值数”为a，

取$x_1=2a+1$，则存在x_2满足$\frac{x_1+f(x_2)}{2}=a$，即$f(x_2)=-1$，这与$f(x)=2^x$的值域为$(0,+\infty)$矛盾！

所以$f(x)=2^x$不是“自均值函数”. 结论 2 分，理由 3 分

(2) 由已知得函数$g(x)$的值域为一个闭区间.

首先证明：$g(x)$为“自均值函数”的充要条件是$g(x)$值域的区间长度大于等于 1.

理由如下：一方面，因为函数$g(x)$为“自均值函数”，所以存在实数a，使得对于任意$x_1\in[0,1]$，都存在$x_2\in[0,1]$满足$\frac{x_1+g(x_2)}{2}=a$，即$g(x_2)=-x_1+2a$，则$g(x_2)\in[2a-1,2a]$.

因为区间$[2a-1,2a]$的长度为 1，所以$g(x)$值域的区间长度大于等于 1. 1 分

（一般结论：若$g(x)$值域的区间长度短于定义域的区间长度，则$g(x)$不是“自均值函数”）

另一方面，若$g(x)$值域中包含区间$[b,b+1]$，取$a=\frac{b+1}{2}$，

则$\forall x_1\in[0,1]$，都存在$g(x_2)=2a-x_1=b+1-x_1\in[b,b+1]$，

所以$\frac{b+1}{2}$是为$g(x)$的一个“自均值数”，所以$g(x)$为“自均值函数”. 1 分 （充要性证明 2 分）

故$g(x)$为“自均值函数”的充要条件是$g(x)$值域的区间长度大于等于 1.

回到原题，设$u=\omega x+\frac{\pi}{6}$，因为$\omega>0$，所以$u\in\left[\frac{\pi}{6},\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，由$y=\sin u$ 的图像可知，

$g(x)$值域的区间长度大于等于 1 $\Leftrightarrow$ $\omega+\frac{\pi}{6}\geq\pi$， 求解过程 2 分

则$\omega\in\left[\frac{5}{6}\pi,+\infty\right)$为所求. 答案 1 分

(3) 因为$h(x)$具有唯一的“自均值数”，由第（2）问可知，$h(x)$值域与定义域的区间长度相同，

所以$h(x)$的值域区间长度为 2，即$h_{max}-h_{min}=2$.

当$t=0$时，不成立. 1 分

当$t\neq0$时，$h(x)$的对称轴为$x=-\frac{1}{t}$.

1. 当$t>0$时， $h_{max}-h_{min}=h(2)-h(0)=2$ ，无解 1 分
2. 当$t\in(-\frac{1}{2},0)$时，$h_{max}-h_{min}=h(2)-h(0)=2$，无解 1 分
3. 当$t\in[-1,-\frac{1}{2}]$时，$h_{max}-h_{min}=h\left(-\frac{1}{t}\right)-h(0)=2$，解得$t=-\frac{1}{2}$ 1 分
4. 当$t\in(-\infty,-1)$时，$h_{max}-h_{min}=h\left(-\frac{1}{t}\right)-h(2)=2$，解得$t=\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$. 1 分

综上， $t=-\frac{1}{2}$或$\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$. 分类讨论的五种情况各占 1 分

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了**【2022 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总】**专题，及时更新最新试题及答案。

通过**【北京高考资讯】公众号**，**对话框回复【期末】**或者**底部栏目<试题下载→期末试题>**，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！