北京五中2021届高三第一学期10月月考

数学试卷

班级_______　姓名________　学号________　成绩___________

一、选择题（每小题4分，共40分）

1.若全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid x>-1\}$，则（　　）

（A）$A\subseteq B$　（B）$B\subseteq A$　（C）$B\subseteq \complement_U A$　（D）$\complement_U A\subseteq B$

2. 下列函数中，值域为$[0,+\infty)$且为偶函数的是（　　）

（A）$y=x^2$　（B）$y=|x-1|$　（C）$y=\cos x$　（D）$y=\ln x$

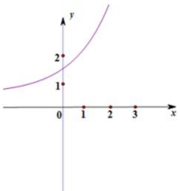
3. 设$a=2^{0.3},b=(\frac{1}{2})^{-0.5},c=\ln 2$，则（　　）

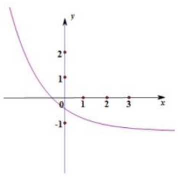
（A）$c<b<a$　（B）$c<a<b$　（C）$a<b<c$　（D）$b<a<c$

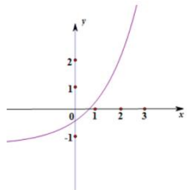
4. 设a，b，c为非零实数,且$a>b>c$,则（　　）

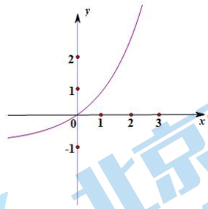
（A）$a-b>b-c$　（B）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$　（C）$a+b>2c$　（D）以上三个选项都不对

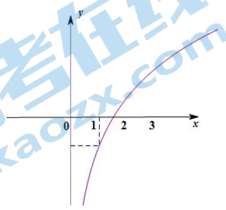
5.已知函数$f(x)=\log_a x+b$的图象如图所示，那么函数$g(x)=a^x+b$的图象可能为（　　）


(A)


(B)


(C)


(D)



6. 函数$f(x)=2^x-x^2$的零点个数为（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

7. 已知$a,b,c\in\mathbf{R}$，在下列条件中，使得$a<b$成立的一个充分而不必要条件是（　　）

（A）$a^3<b^3$　（B）$ac^2<bc^2$　（C）$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　（D）$a^2<b^2$

8. 已知函数$f(x)=\lg|1+x|-\lg|1-x|$，则$f(x)$（　　）

（A）是奇函数，且在$(1,+\infty)$上是增函数　（B）是奇函数，且在$(1,+\infty)$上是减函数

（C）是偶函数，且在$(1,+\infty)$上是增函数　（D）是偶函数，且在$(1,+\infty)$上是减函数

9. 定义域为R的函数$f(x)$对任意$x\in R$都有$f(x)=f(4-x)$，且其导函数$f'(x)$满足$(x-2)f'(x)>0$，则当$2<a<4$时，有（　　）

（A） $f(2^a)<f(2)<f(\log_2 a)$　　（B） $f(2)<f(2^a)<f(\log_2 a)$

（C） $f(2)<f(\log_2 a)<f(2^a)$　　（D） $f(\log_2 a)<f(2^a)<f(2)$

10. 某中学举行了科学防疫知识竞赛.经过选拔，甲、乙、丙三位选手进入了的最后角逐.他们还将进行四场知识竞赛.规定：每场知识竞赛前三名的得分依次为$a,b,c(a>b>c$, 且$a,b,c\in \mathbf{N}^*)$；选手总分为各场得分之和．四场比赛后，已知甲最后得分为16分，乙和丙最后得分都为8分，且乙只有一场比赛获得了第一名，则下列说法正确的是　　（　　）

（A）每场比赛的第一名得分a为4　　（B）甲至少有一场比赛获得第二名

（C）乙在四场比赛中没有获得过第二名　　（D）丙至少有一场比赛获得第三名

二、填空题（每小题5分，共25分）

11. 已知$a>1$，则$a+\dfrac{4}{a-1}$的最小值为________.

12. 设集合$A=\{-1,0,1\}$，集合$B=\{0,1,2,3\}$，定义$A*B=\{(x,y)\,|\,x\in A\cap B, y\in A\cup B\}$，则$A*B$中元素的个数为________.

13. 定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x-2)=f(x+2)$，且$x\in(0,1)$时，$f(x)=2^x+\dfrac{1}{4}$，则$f(\log_2 20)=$________.

14. 已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且$f'(x)$是偶函数，$f'(0)=1$，$f'(1)=0$.写出一个满足条件的函数$f(x)=$________

15. 已知函数$f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\le 0,\\ |\ln x|, & x>0.\end{cases}$给出下列三个结论：

①当$a=-2$时，函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,1)$；

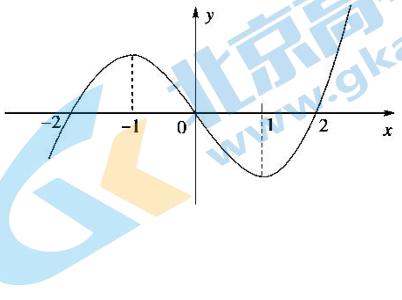
②若函数$f(x)$无最小值，则a的取值范围为$(0,+\infty)$；

③若$a<1$且$a\neq 0$，则$\exists b\in\mathbf{R}$，使得函数$y=f(x)-b$恰有3个零点x_1,x_2,x_3，且$x_1x_2x_3=-1$.

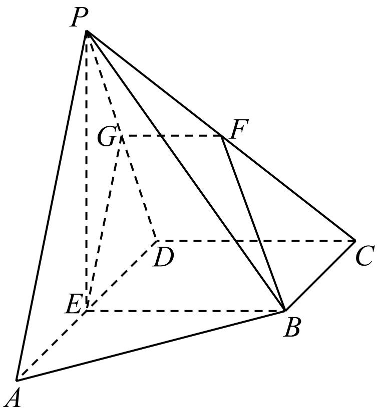
其中，所有正确结论的序号是_______.

三、解答题

16. 已知R上可导函数$f(x)$的图象如图所示，解不等式$(x^2-2x-3)f'(x)>0$　.



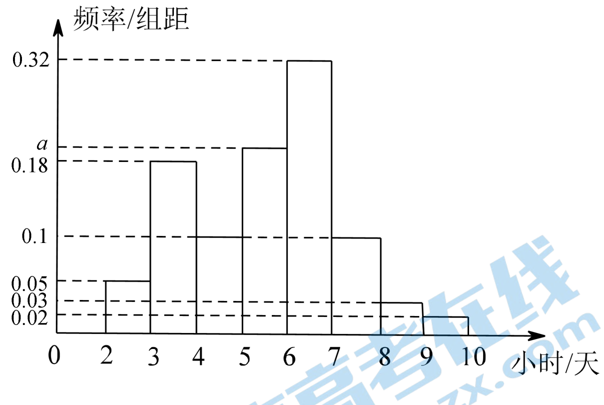
17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC // AD$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，E 为线段 AD 的中点. $PE\perp$ 底面 $ABCD$，点 F 是棱 PC 的中点，平面 BEF 与棱 PD 相交于点 G.



（Ⅰ）求证：$BE//FG$；

（Ⅱ）若 PC 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，求直线 PB 与平面 BEF 所成角的正弦值.

18. 为了认真贯彻落实北京市教委关于做好中小学生延期开学期间“停课不停学”工作要求，各校以教师线上指导帮助和学生居家自主学习相结合的教学模式积极开展工作，并鼓励学生积极开展锻炼身体和课外阅读活动.为了解学生居家自主学习和锻炼身体的情况，从某校高三年级随机抽取了 100 名学生，获得了他们一天中用于居家自主学习和锻炼身体的总时间分别在 $[2,3),[3,4),[4,5),L\ ,[8,9),[9,10)$（单位：小时）的数据，整理得到的数据绘制成频率分布直方图（如图）.



（Ⅰ）由图中数据求 a 的值，并估计从该校高三年级中随机抽取一名学生，这名学生该天居家自主学习和锻炼身体的总时间在 $[5,6)$ 的概率；

（Ⅱ）为了进一步了解学生该天锻炼身体的情况，现从抽取的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体的总时间在 $[2,3)$ 和 $[8,9)$ 的人中任选 3 人，求其中在 $[8,9)$ 的人数 X 的分布列和数学期望；

（III）假设同一时间段中的每个数据可用该时间段的中点值代替，试估计样本中的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间的平均数在哪个时间段？（只需写出结论）

19. 已知椭圆$W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$过$A(0,1)$, $B(0,-1)$两点，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆W 的方程;

（Ⅱ）过点A的直线l与椭圆W的另一个交点为C，直线l交直线$y=2$于点M，记直线BC， BM的斜率分别为k_1， k_2，求k_1k_2的值.

20. 已知$f(x)=e^x+\sin x+ax(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）在下面的三个条件中，选择一个，使得$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，并证明你的结论.

①$a=-2$；②$a=-1$；③$a=-3$.

（Ⅱ）若对任意$x\geq 0$，$f(x)\geq 1$恒成立，求实数a的取值范围;

（Ⅲ）若$f(x)$有最小值，请直接给出实数a的取值范围.

21. 设n为正整数，集合$A=\{\alpha\,|\,\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合$A$中的任意元素$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记

$$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(x_1+y_1+|x_1-y_1|)+(x_2+y_2+|x_2-y_2|)+\cdots+(x_n+y_n+|x_n-y_n|)].$$

（Ⅰ）当n=3时，若$\alpha=(0,1,1)$， $\beta=(0,0,1)$，求$M(\alpha,\alpha)$和$M(\alpha,\beta)$的值;

（Ⅱ）当$n=4$时，对于A中的任意两个不同的元素α,β，

证明：$M(\alpha,\beta)\leqslant M(\alpha,\alpha)+M(\beta,\beta)$.

（Ⅲ）给定不小于2的正整数n，设B是A的子集，且满足：对于B中的任意两个不同元素α,β，$M(\alpha,\beta)=M(\alpha,\alpha)+M(\beta,\beta)$. 写出一个集合$B$，使其元素个数最多，并说明理由.

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	C	B	D	B	B	C	B

二、填空题

11. 答案：3.

12. 答案：10.

13. 答案：-1.

14. 答案：$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+x$.

15. 答案：②③.

三、解答题

16. [解析]　不等式$(x^2-2x-3)f'(x)>0$ 化为

$\begin{cases}x^2-2x-3>0\\ f'(x)>0\end{cases}$ (1)或$\begin{cases}x^2-2x-3<0\\ f'(x)<0\end{cases}$ (2)

$\because f(x)$在$(-\infty，-1)$和$(1，+\infty)$上单调增，在$(-1,1)$上单调减，

$\therefore f'(x)>0$ 的解集为$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$，$f'(x)<0$ 解集为$(-1,1)$，

由 $x^2-2x-3>0$ 得，$x<-1$ 或 $x>3$，

由 $x^2-2x-3<0$ 得，$-1<x<3$.

$\therefore$由(1)得$\begin{cases}x<-1\text{ 或 }x>3\\ x<-1\text{ 或 }x>1\end{cases}$，$\therefore x<-1$ 或 $x>3$；

由(2)得$\begin{cases}-1<x<3\\ -1<x<1\end{cases}$，$\therefore -1<x<1$.

综上可知，$x\in(-\infty，-1)\cup(-1,1)\cup(3，+\infty)$.

17. 答案

（Ⅰ）证明：因为E为AD中点，所以$DE=\dfrac{1}{2}AD=1$.

又因为$BC=1$，所以$DE=BC$.

在梯形$ABCD$中，$DE\,//\,BC$，

所以四边形$BCDE$为平行四边形.

所以$BE\,//\,CD$.

又因为$BE\not\subset$平面PCD，且$CD\subset$平面PCD，

所以$BE\,//$ 平面PCD.

因为$BE\subset$平面BEF，平面$BEF\cap$平面$PCD=FG$，

所以 $BE // FG$.

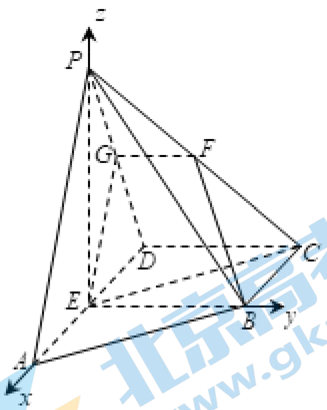
（Ⅱ）解：（解法 1）因为 $PE \perp$ 平面 $ABCD$，且 $AE, BE \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE \perp AE$，且 $PE \perp BE$.

因为四边形 $BCDE$ 为平行四边形，$\angle ADC = 90°$，

所以 $AE \perp BE$.

以 E 为坐标原点，如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



则 $E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,1,0)$，$D(-1,0,0)$.

设 $P(0,0,m)$（$m>0$），

所以 $\overrightarrow{CP}=(1,-1,m)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$.

因为 PC 与 AB 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{CP},\overrightarrow{AB}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{2}}\right|$

$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $m=\sqrt{2}$.

则 $P(0,0,\sqrt{2})$，$F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 $\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{2})$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}y=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$，则 $z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$.

所以 $\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线 PB 与平面 BEF 的所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

18. 答案

解：（Ⅰ）因为 $(0.05+0.1+0.18+a+0.32+0.1+0.03+0.02)\times 1=1$，

所以 $a=0.2$ ……………2 分

因为 $0.2\times 1\times 100=20$，

所以居家自主学习和锻炼身体总时间该天在 $[5,6)$ 的学生有 20 人……3 分

所以从该校高三年级中随机抽取一名学生，这名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间在 $[5,6)$ 的概率为 $\dfrac{20}{100}=0.2$ ……………5 分

（Ⅱ）由图中数据可知该天居家自主学习和锻炼身体总时间在 $[2,3)$ 和 $[8,9)$ 的人分别有 5 人和 3 人……6 分

所以 X 的所有可能取值为 0,1,2,3……………7 分

$P(X=0)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{28}$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$ ……………9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$

所以 X 的期望 $E(X)=0\times\dfrac{5}{28}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{15}{56}+3\times\dfrac{1}{56}=\dfrac{9}{8}$ …………11 分

（Ⅲ）样本中的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间的平均数在 $[5,6)$ ….14 分

19. 答案

解：（Ⅰ）由题意，$\begin{cases}b=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆 W 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）由题意，直线 l 不与坐标轴垂直.

设直线 l 的方程为：$y=kx+1$（$k\neq 0$）.

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2+4y^2=4. \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$.

设 $C(x_1,y_1)$，因为 $x_1\neq 0$，所以 $x_1=\frac{-8k}{4k^2+1}$.

得 $y_1=kx_1+1=k\cdot\frac{-8k}{4k^2+1}+1=\frac{1-4k^2}{4k^2+1}$.

即 $C(\frac{-8k}{4k^2+1},\frac{1-4k^2}{4k^2+1})$.

又因为 $B(0,-1)$，所以 $k_1=\frac{\frac{1-4k^2}{4k^2+1}+1}{\frac{-8k}{4k^2+1}}=-\frac{1}{4k}$.

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y=2. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{1}{k}, \\ y=2. \end{cases}$

所以点 M 的坐标为 $(\frac{1}{k},2)$.

所以 $k_2=\frac{2+1}{\frac{1}{k}}=3k$.

所以 $k_1\cdot k_2=-\frac{1}{4k}\cdot 3k=-\frac{3}{4}$.

20. 答案

（Ⅰ）选②不得分.

选①.解：$f'(x)=e^x+\cos x+a$，

对于 $a=-2$，

当 $x<0$ 时，$e^x<1,\cos x\leq 1$，

所以 $f'(x)=e^x+\cos x-2<0$.

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减.

选③同上.

（Ⅱ）解：当 $x=0$ 时，$f(x)=1\geq 1$，对于 $a\in \mathrm{R}$，命题成立，

当 $x>0$ 时，设 $g(x)=e^x+\cos x+a$，

则 $g'(x)=e^x-\sin x$.

因为 $e^x>1,\quad \sin x\le 1$，

所以 $g'(x)=e^x-\sin x>1-1=0$， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0)=2+a$，

所以 $g(x)>2+a$.

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(x)>2+a$.

① 当 $a\ge -2$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(0)=1$，

所以 $f(x)>1$ 恒成立.

② 当 $a<-2$ 时， $f'(0)=2+a<0$，

因为 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又当 $x=\ln(2-a)$ 时， $f'(x)=-a+2+\cos x+a=2+\cos x>0$，

所以存在 $x_0\in(0,+\infty)$，对于 $x\in(0,x_0)$， $f'(x)<0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f(x)<f(0)=1$，不合题意.

综上，当 $a\ge -2$ 时，对于 $x\ge 0$， $f(x)\ge 1$ 恒成立. ……………………………13 分

（III）解： $a<0$ ……………………………………15 分

21. 答案：

（Ⅰ）解：因为 $\alpha=(0,1,1)$， $\beta=(0,0,1)$，

所以 $M(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}[(0+0+|0-0|)+(1+1+|1-1|)+(1+1+|1-1|)]=2$，

$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(0+0+|0-0|)+(1+0+|1-0|)+(1+1+|1-1|)]=2$.

（Ⅱ）证明：当 $n=4$ 时，对于 A 中的任意两个不同的元素 α,β，

设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$， $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)$，有

$M(\alpha,\alpha)=x_1+x_2+x_3+x_4$， $M(\beta,\beta)=y_1+y_2+y_3+y_4$.

对于任意的 x_i,y_i， $i=1,2,3,4$，

当 $x_i \geq y_i$ 时，有 $\frac{1}{2}(x_i+y_i+|x_i-y_i|)=\frac{1}{2}[x_i+y_i+(x_i-y_i)]=x_i$，

当 $x_i \leq y_i$ 时，有 $\frac{1}{2}(x_i+y_i+|x_i-y_i|)=\frac{1}{2}[x_i+y_i-(x_i-y_i)]=y_i$.

即 $\frac{1}{2}(x_i+y_i+|x_i-y_i|)=\max\{x_i,y_i\}$.

所以，有 $M(\alpha,\beta)=\max\{x_1,y_1\}+\max\{x_2,y_2\}+\max\{x_3,y_3\}+\max\{x_4,y_4\}$.

又因为 $x_i,y_i\in\{0,1\}$，

所以 $\max\{x_i,y_i\}\leq x_i+y_i$， $i=1,2,3,4$， 当且仅当 $x_iy_i=0$ 时等号成立.

所以， $\max\{x_1,y_1\}+\max\{x_2,y_2\}+\max\{x_3,y_3\}+\max\{x_4,y_4\}$

$\leq(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)$

$=(x_1+x_2+x_3+x_4)+(y_1+y_2+y_3+y_4)$，

即 $M(\alpha,\beta)\leq M(\alpha,\alpha)+M(\beta,\beta)$， 当且仅当 $x_iy_i=0$ （$i=1,2,3,4$）时等号成立.

（III）解：由（II）问，可证，对于任意的 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$，

若 $M(\alpha,\beta)=M(\alpha,\alpha)+M(\beta,\beta)$， 则 $x_iy_i=0$， $i=1,2,3,\cdots,n$ 成立.

所以，考虑设

$A_0=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)|,x_1=x_2=\cdots=x_n=0\}$，

$A_1=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\,|\,x_1=1,x_i\in\{0,1\},i=2,3,\cdots,n\}$，

对于任意的 $k=2,3,\cdots,n$，

$A_k=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\,|\,(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\in A,x_1=x_2=\cdots=x_{k-1}=0,x_k=1\}$.

所以 $A=A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_n$.

假设满足条件的集合 B 中元素个数不少于 $n+2$，

则至少存在两个元素在某个集合 A_k （$k=1,2,\cdots,n-1$）中，

不妨设为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$， 则 $x_k=y_k=1$.

与假设矛盾，所以满足条件的集合 B 中元素个数不多于 $n+1$.

取 $e_0=(0,0,\cdots0)$；

对于 $k=1,2,\cdots,n-1$， 取 $e_k=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\in A_k$， 且 $x_{k+1}=\cdots=x_n=0$； $e_n\in A_n$.

令 $B=\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$，

则集合 B 满足条件，且元素个数为 $n+1$.

故 B 是一个满足条件且元素个数最多的集合.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多