

数学试卷

2023 年 4 月

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,请将答题卡交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1)书架上层放有 4 本不同的数学书,下层放有 5 本不同的语文书,从书架上任取数学书和语文书各 1 本,不同取法的种数为

- (A)9 (B)12 (C)20 (D)24

(2)计算:  $A_5^2 \times 3! =$

- (A)30 (B)60 (C)90 (D)120

(3)二项式  $(x+2)^3$  的展开式为

- (A)  $x^3 + 6x^2 + 6x + 8$  (B)  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$   
 (C)  $x^3 + 12x^2 + 6x + 8$  (D)  $x^3 + 12x^2 + 12x + 8$

(4)已知  $(1+x)^8 = C_8^0 + C_8^1 x + C_8^2 x^2 + \dots + C_8^8 x^8$ , 则  $C_8^0 + C_8^2 + \dots + C_8^8 =$

- (A)127 (B)128 (C)255 (D)256

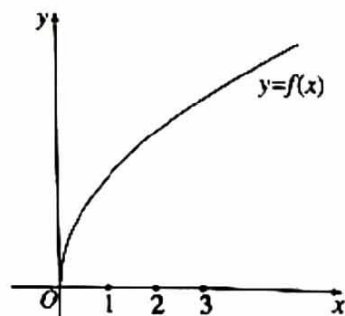
(5)已知函数  $f(x) = x^2$ , 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)1 (C)  $\frac{3}{2}$  (D)2

(6)已知函数  $f(x)$  的图象如图所示, 则下列结论正确的是

- (A)  $0 < f'(3) < f'(2) < f'(1)$   
 (B)  $f'(1) < f'(2) < f'(3) < 0$   
 (C)  $0 < f'(1) < f'(2) < f'(3)$   
 (D)  $f'(3) < f'(2) < f'(1) < 0$

$[0, 3) \uparrow$   
 $[0, 3] \uparrow$



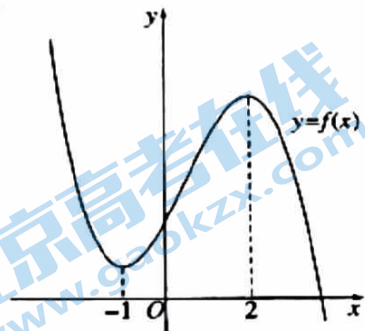
(7)下列运算正确的是

- (A)  $(2 - \cos x)' = 2 + \sin x$  (B)  $(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x$   
 (C)  $(\frac{\ln x}{2})' = \frac{1}{2x}$  (D)  $(\frac{1}{1-x})' = -\frac{1}{(x-1)^2}$

(8) 已知函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 若  $f(x)$  的图象如图所示, 下列结

论错误的是

- (A) 当  $x < -1$  时,  $f'(x) < 0$   
 (B) 当  $x = -1$  时,  $f'(x) = 0$   
 (C) 当  $x = 2$  时,  $f(x)$  取得极大值  
 (D) 当  $x = 2$  时,  $f(x)$  取得最大值



(9) 某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料, 瓶子的制造成本是  $1.2\pi r^2$  分, 其中  $r$  (单位: cm) 是瓶子的半径, 已知每出售 1 mL 的饮料, 可获利 0.3 分, 且制造商能制作的瓶子的最大半径为 6 cm, 当每瓶饮料的利润最大时, 瓶子的半径为

- (A) 4.5 cm      (B) 5 cm      (C) 5.5 cm      (D) 6 cm

(10) 若函数  $f(x) = ax^2 - \frac{3}{x}$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递减, 则实数  $a$  的取值范围是

- (A)  $(-\infty, -2]$       (B)  $(-\infty, -\frac{3}{2}]$       (C)  $(-\infty, -\frac{4}{3}]$       (D)  $(-\infty, -\frac{2}{3}]$

## 第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 一质点 A 沿直线运动, 位移  $y$  (单位: m) 与时间  $t$  (单位: s) 之间的关系为  $y(t) = 2t^2 + 1$ , 则

$1 \leq t \leq 2$  这段时间内的平均速度为 \_\_\_\_\_ m/s;  $t = 2$  s 时的瞬时速度为 \_\_\_\_\_ m/s.

(12) 已知函数  $f(x) = x \ln x$ , 则  $f(x)$  的单调递减区间为 \_\_\_\_\_.

(13) 已知  $(x-2)(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ , 则  $a_0 =$  \_\_\_\_\_;  $a_5 =$  \_\_\_\_\_.

(14) 从 0, 2, 4 中任取 2 个数字, 从 1, 3, 5 中任取 2 个数字, 组成没有重复数字的四位数, 则其中奇数的个数为 \_\_\_\_\_.

(15) 已知函数  $f(x) = x^2 + 2(x \geq 0)$ ,  $g(x) = ae^{-x} (a > 0)$ , 给出下列四个结论:

- ① 若  $x_0 \in [1, 2]$ , 则  $g(x_0) \geq \frac{a}{e}$ ;  
 ② 若函数  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $h(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增;  
 ③ 若关于  $x$  的方程  $f(x) - g(x) = 0$  在区间  $[0, 1]$  上无解, 则  $a > 3e$ ;  
 ④ 若点  $M, N$  分别在函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的图象上, 则一定存在  $M, N$  关于直线  $y = x$  对称.

其中所有正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 12 分)

从 4 名女生 3 名男生中选出 3 名学生去参加一项创新大赛。

(I) 选出 3 名学生中,恰有 1 名男生的选法有多少种?

(II) 选出 3 名学生中,既有女生又有男生的选法有多少种?

(III) 选出 3 名学生中,女生中的甲与男生中的乙至少有 1 名在内的选法有多少种?

(17)(本小题 13 分)

已知二项式为  $(x - \frac{2}{x})^7$ 。

(I) 求该二项式的展开式的中间两项;

(II) 求该二项式的展开式中  $x^3$  项的系数。

(18)(本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ 。

(I) 求  $f(x)$  的极值;

(II) 求  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值和最小值。

(19)(本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x-a}{e^x}, a \in \mathbf{R}$ .

(I) 若  $f'(0) = 4$ , 求  $a$  的值;

(II) 当  $a = 0$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(III) 若  $f(x)$  在  $x = 2$  时取得极值, 求  $a$  的值.

(20)(本小题 16 分)

已知函数  $f(x) = x^2 + (a-4)x - 2a \ln x, a \in \mathbf{R}$ .

(I) 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 当  $a = -1$  时, 求证:  $\forall x_1, x_2 \in [1, 4]$ , 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2 + 2 \ln 2$ .

(21)(本小题 16 分)

已知函数  $f(x) = e^x - 1$ .

(I) 求  $f(x)$  的零点;

(II) 设  $g(x) = f(x) - ax, a \in \mathbf{R}$ .

(i) 若  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上存在零点, 求  $a$  的取值范围;

(ii) 当  $a > 0$  时, 若  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上的最小值是 0, 求  $a$  的值.

# 通州区 2022-2023 学年第二学期高二年级期中质量检测

## 数学参考答案及评分标准

2023 年 4 月

### 第一部分（选择题 共 40 分）

#### 一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 题号 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| 答案 | C   | D   | B   | B   | D   | A   | C   | D   | D   | B    |

### 第二部分（非选择题 共 110 分）

#### 二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11) 6; 8    (12)  $(0, \frac{1}{e})$     (13) -2; 3    (14) 84    (15) ②④

#### 三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (本小题 12 分)

解：(I) 从 3 名男生中选出 1 名的抽法有  $C_3^1$ , .....1 分

从 4 名女生选出 2 名的抽法有  $C_4^2$ , .....2 分

所以选出的 3 名学生中，恰有 1 名男生的选法为  $C_3^1 \times C_4^2 = 3 \times 6 = 18$ . .....4 分

(II) 选出的 3 名学生中，有 1 名女生 2 名男生的选法有  $C_4^1 C_3^2$ , .....5 分

有 2 名女生 1 名男生的选法有  $C_4^2 C_3^1$ , .....6 分

所以选出的 3 名学生中，既有女生又有男生的选法为  $C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 = 4 \times 3 + 6 \times 3 = 30$ . .....8 分

(III) 选出的 3 名学生中，女生中的甲在内且男生中的乙不在内的选法有  $C_5^2$ ; .....9 分

女生中的甲不在内且男生中的乙在内的选法有  $C_5^2$ ; .....10 分

女生中的甲在内且男生中的乙也在内的选法有  $C_5^1$ , .....11 分

所以选出的 3 名学生中，女生中的甲与男生中的乙至少有 1 名在内的选法为  $C_5^2 + C_5^2 + C_5^1 = 10 + 10 + 5 = 25$ . .....12 分

(17) (本小题 13 分)

解：(I) 因为二项式为  $(x - \frac{2}{x})^7$ ,

所以  $(x - \frac{2}{x})^7$  的展开式的中间两项为第 4 项和第 5 项. ....2 分

所以  $(x - \frac{2}{x})^7$  的展开式的第 4 项是  $T_{3+1} = C_7^3 \cdot x^{7-3} \cdot (-\frac{2}{x})^3 = C_7^3 \times (-2)^3 x^4 (\frac{1}{x})^3 = -280x$ .  
.....4 分

第 5 项是  $T_{4+1} = C_7^4 \cdot x^{7-4} \cdot (-\frac{2}{x})^4 = C_7^4 \times (-2)^4 x^3 (\frac{1}{x})^4 = \frac{560}{x}$ . ....6 分

(II) 因为二项式为  $(x - \frac{2}{x})^7$ ,

所以展开式的通项是  $C_7^k \cdot x^{7-k} \cdot (-\frac{2}{x})^k = (-2)^k C_7^k x^{7-2k}$ . ....9 分

根据题意, 得  $7 - 2k = 3$ ,

所以  $k = 2$ . ....11 分

所以  $(x - \frac{2}{x})^7$  的展开式中  $x^3$  的系数是  $(-2)^2 C_7^2 = 84$ . ....13 分

(18) (本小题 13 分)

解: (I) 因为  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ , 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

所以  $f'(x) = x^2 - 1$ . ....2 分

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = -1$ , 或  $x = 1$ . ....3 分

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表所示.

|         |                 |               |           |               |                |
|---------|-----------------|---------------|-----------|---------------|----------------|
| $x$     | $(-\infty, -1)$ | $-1$          | $(-1, 1)$ | $1$           | $(1, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | $+$             | $0$           | $-$       | $0$           | $+$            |
| $f(x)$  | 单调递增            | $\frac{5}{3}$ | 单调递减      | $\frac{1}{3}$ | 单调递增           |

.....7 分

所以, 当  $x = -1$  时,  $f(x)$  有极大值, 且极大值为  $f(-1) = \frac{5}{3}$ ;

当  $x = 1$  时,  $f(x)$  有极小值, 且极小值为  $f(1) = \frac{1}{3}$ . ....8 分

(II) 由 (I) 知,  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上有极小值为  $f(1) = \frac{1}{3}$ . ....9 分

因为  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = \frac{5}{3}$ . ....11 分

所以  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值为  $\frac{5}{3}$ , 最小值为  $\frac{1}{3}$ . ....13 分

(19) (本小题 15 分)

解: (I) 因为  $f(x) = \frac{x-a}{e^x}$ , 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

所以  $f'(x) = \frac{e^x - (x-a)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x+a}{e^x}$ . .....3 分

因为  $f'(0) = 4$ ,

所以  $1+a = 4$ .

所以  $a = 3$ . .....4 分

(II) 当  $a = 0$  时,  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ . .....5 分

所以  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ . .....6 分

所以  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ . .....8 分

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = x$ . .....9 分

(III) 因为  $f(x)$  在  $x = 2$  时取得极值,

所以  $f'(2) = 0$ , 即  $1-2+a = 0$ ,

所以  $a = 1$ . .....11 分

当  $a = 1$  时,  $f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$ . .....12 分

令  $f'(x) > 0$ , 即  $2-x > 0$ , 得  $x < 2$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 即  $2-x < 0$ , 得  $x > 2$ .

所以  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 2)$  上单调递增, 在区间  $(2, +\infty)$  上单调递减. ....14 分

所以  $f(x)$  在  $x = 2$  时取得极大值, 符合题意. ....15 分

所以  $a = 1$ .

(20) (本小题 16 分)

解: (I) 因为  $f(x) = x^2 + (a-4)x - 2a \ln x$ , 定义域为  $(0, +\infty)$ , .....1 分

所以  $f'(x) = 2x + (a-4) - \frac{2a}{x} = \frac{2x^2 + (a-4)x - 2a}{x} = \frac{(x-2)(2x+a)}{x}$ . .....2 分

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 2$ , 或  $x = -\frac{a}{2}$ . .....3 分

① 当  $-\frac{a}{2} = 2$ , 即  $a = -4$  时,  $f'(x) > 0$ .

所以  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增. ....4 分

②当  $-\frac{a}{2} \leq 0$ , 即  $a \geq 0$  时,

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表所示.

|         |          |     |                |
|---------|----------|-----|----------------|
| $x$     | $(0, 2)$ | $2$ | $(2, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | $-$      | $0$ | $+$            |
| $f(x)$  | 单调递减     | 极小值 | 单调递增           |

所以  $f(x)$  在区间  $(0, 2)$  上单调递减, 在区间  $(2, +\infty)$  上单调递增. ....5 分

③当  $0 < -\frac{a}{2} < 2$ , 即  $-4 < a < 0$  时,

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表所示.

|         |                     |                |                     |     |                |
|---------|---------------------|----------------|---------------------|-----|----------------|
| $x$     | $(0, -\frac{a}{2})$ | $-\frac{a}{2}$ | $(-\frac{a}{2}, 2)$ | $2$ | $(2, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | $+$                 | $0$            | $-$                 | $0$ | $+$            |
| $f(x)$  | 单调递增                | 极大值            | 单调递减                | 极小值 | 单调递增           |

所以  $f(x)$  在区间  $(0, -\frac{a}{2})$  和  $(2, +\infty)$  上单调递增, 在区间  $(-\frac{a}{2}, 2)$  上单调递减. ....7 分

④当  $-\frac{a}{2} > 2$ , 即  $a < -4$  时,

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如下表所示.

|         |          |     |                     |                |                           |
|---------|----------|-----|---------------------|----------------|---------------------------|
| $x$     | $(0, 2)$ | $2$ | $(2, -\frac{a}{2})$ | $-\frac{a}{2}$ | $(-\frac{a}{2}, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | $+$      | $0$ | $-$                 | $0$            | $+$                       |
| $f(x)$  | 单调递增     | 极大值 | 单调递减                | 极小值            | 单调递增                      |



所以  $f(x)$  在区间  $(0, 2)$  和  $(-\frac{a}{2}, +\infty)$  上单调递增, 在区间  $(2, -\frac{a}{2})$  上单调递减. ....9 分

综上所述, 当  $a \geq 0$  时,  $f(x)$  的单调递增区间是  $(2, +\infty)$ , 单调递减区间是  $(0, 2)$ ;

当  $-4 < a < 0$  时,  $f(x)$  的单调递增区间是  $(0, -\frac{a}{2})$  和  $(2, +\infty)$ , 单调递减区间是  $(-\frac{a}{2}, 2)$ ;

当  $a = -4$  时,  $f(x)$  的单调递增区间是  $(0, +\infty)$ , 无递减区间;

当  $a < -4$  时,  $f(x)$  的单调递增区间是  $(0, 2)$  和  $(-\frac{a}{2}, +\infty)$ , 单调递减区间是  $(2, -\frac{a}{2})$ .

.....10 分

(II) 当  $a = -1$  时,  $f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x$ .

当  $x \in [1, 4]$  时, 由 (I) 知,  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  上单调递减, 在区间  $(2, 4)$  上单调递增.

.....11 分

所以  $f(x)$  在区间  $[1, 4]$  上的最小值是  $f(2) = -6 + 2\ln 2$ .

.....12 分

因为  $f(1) = -4$ ,  $f(4) = -4 + 4\ln 2$ .

所以  $f(1) < f(4)$ .

所以  $f(x)$  在区间  $[1, 4]$  上的最大值是  $f(4) = -4 + 4\ln 2$ .

.....13 分

所以  $\forall x_1, x_2 \in [1, 4]$ , 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(4) - f(2) = 2 + 2\ln 2$ .

.....16 分

(21) (本小题 16 分)

解: (I) 因为  $f(x) = e^x - 1$ ,

令  $f(x) = 0$ , 即  $e^x - 1 = 0$ ,

.....2 分

解得  $x = 0$ .

所以  $f(x)$  的零点是 0.

.....3 分

(II) (i) 因为  $g(x) = f(x) - ax$ ,

所以  $g(x) = e^x - ax - 1$ . 所以  $g'(x) = e^x - a$ .

① 当  $a \leq 0$  时,  $g'(x) > 0$ . 所以  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增.

所以  $g(x) > g(0) = 0$ .

所以  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上不存在零点, 不符合题意.

.....4 分

② 当  $a > 0$  时, 令  $g'(x) = 0$ , 即  $e^x - a = 0$ , 得  $x = \ln a$ .

若  $\ln a < 0$ , 即  $0 < a < 1$  时,  $x > \ln a$ . 所以  $g'(x) > 0$ .

所以  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增.

又  $g(0) = 0$ .

所以  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上不存在零点, 不符合题意. ....5 分

若  $\ln a > 0$ , 即  $a > 1$  时, 令  $g'(x) > 0$ , 得  $x > \ln a$ ; 令  $g'(x) < 0$ , 得  $x < \ln a$ .

所以  $g(x)$  在区间  $(0, \ln a)$  上单调递减, 在区间  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.

因为  $g(0) = 0$ , 所以存在  $x_1 > 0$ , 使得  $g(x_1) < g(0) = 0$ . ....6 分

当  $x \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ . 所以存在  $x_2 > x_1$ , 使得  $g(x_2) > 0$ . ....7 分

由零点存在性定理, 存在  $x_0 \in [x_1, x_2]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ .

所以  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上存在零点. ....8 分

综上所述,  $a$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ . ....9 分

(ii) 当  $a > 0$  时,  $g(x)$  在区间  $(0, \ln a)$  上单调递减, 在区间  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.

所以当  $x = \ln a$  时,  $g(x)$  取得极小值, 也是最小值.

① 当  $\ln a \leq 1$ , 即  $0 < a \leq e$  时,  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增.

所以  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上最小值为  $g(1)$ . 所以  $g(1) = e - a - 1 = 0$ .

所以  $a = e - 1$ . ....10 分

② 当  $\ln a \geq 2$ , 即  $a \geq e^2$  时,  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递减.

所以  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上最小值为  $g(2)$ . 所以  $g(2) = e^2 - 2a - 1 = 0$ .

所以  $a = \frac{e^2 - 1}{2}$ , 不符合题意. ....11 分

③ 当  $1 < \ln a < 2$ , 即  $e < a < e^2$  时,  $g(x)$  在区间  $[1, \ln a]$  上单调递减, 在区间  $[\ln a, 2]$  上单调递增.

所以  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上最小值为  $g(\ln a)$ .

所以  $g(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - 1 = 0$ , 即  $a - a \ln a - 1 = 0$ . ....12 分

令  $h(a) = a - a \ln a - 1 (e < a < e^2)$ , ....13 分

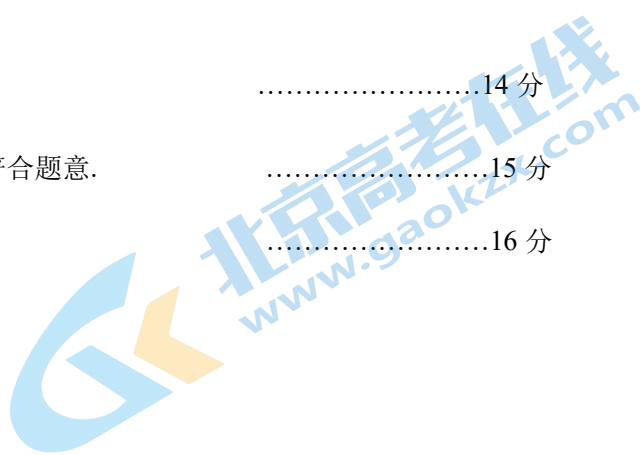
所以  $h'(a) = -\ln a < 0$ . 所以  $h(x)$  在区间  $(e, e^2)$  上单调递减.

因为  $h(e) = -1$ ,

所以  $h(x)$  在区间  $(e, e^2)$  上无零点. ....14 分

所以当  $e < a < e^2$  时, 方程  $a - a \ln a - 1 = 0$  无解, 不符合题意. ....15 分

综上所述,  $a$  的值为  $e - 1$ . ....16 分



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯