天一大联考
2023—2024 学年高一年级阶段性测试(一)
数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合中元素的概念,并集的概念.

解析 $M\cup N=\{1,2,3,4,5,6\}$.

2. 答案 C

命题意图 本题考查真子集的概念.

解析 由 $x^2-9=0$ 得 $x=\pm 3$,所以 $A=\{-3,3\}$,则集合 B 可以为 $\varnothing$,$\{-3\}$ 或 $\{3\}$,故有 3 个.

3. 答案 B

命题意图 本题考查补集的概念,集合的交运算.

解析 因为 $A=\{-2,2\}$,所以 $\complement_U A=\{-1,0,1,3,4,5\}$,所以 $(\complement_U A)\cap B=\{-1,4\}$.

4. 答案 C

命题意图 本题考查量词及命题的真假.

解析 对于 A,$\sqrt{x^2}=|x|$,当 $x<0$ 时,$|x|=-x$,该命题为假命题;

对于 B,因为 $x^2=3$,所以 $x=\pm\sqrt{3}$,$\sqrt{3}$ 是无理数,该命题为假命题;

对于 C,$|x|$ 是非负整数,也即自然数,所以该命题是真命题;

对于 D,因为 $\Delta=(-2)^2-12<0$,所以方程 $x^2-2x+3=0$ 没有实数解,该命题为假命题.

5. 答案 A

命题意图 本题考查充要条件的判断.

解析 $p:m^2-8m<0$,即 $p:0<m<8$. 因为关于 x 的不等式 $x^2+(m-4)x+9>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以 $\Delta=(m-4)^2-36<0$,即 $m^2-8m-20<0$,解得 $-2<m<10$. 因为 $0<m<8\Rightarrow -2<m<10$,而 $-2<m<10\not\Rightarrow 0<m<8$,所以 p 是 q 的充分不必要条件.

6. 答案 D

命题意图 本题考查基本不等式.

解析 因为 $x>3$,所以 $\dfrac{x^2-6x+11}{x-3}=\dfrac{(x-3)^2+2}{x-3}=x-3+\dfrac{2}{x-3}\geqslant 2\sqrt{(x-3)\cdot\dfrac{2}{x-3}}=2\sqrt{2}$,当且仅当 $x-3=\dfrac{2}{x-3}$,即 $x=3+\sqrt{2}$ 时取等号,故 $\dfrac{x^2-6x+11}{x-3}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

7. 答案 B

命题意图 本题考查集合相等以及集合中元素的特性.

解析 由题意得 $\dfrac{10}{x^2-2x+2}>1$,即 $x^2-2x-8<0$,解得 $-2<x<4$,因为 $x\in\mathbf{N}^*$,所以 $A=\{1,2,3\}$,而 $A=B$,故 $a=2$.

8. 答案 C

命题意图　本题考查一元二次不等式.

解析　由已知可得 $-1,3$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，且 $a<0$，由根与系数的关系可得 $-1+3=-\frac{b}{a}$，$-1\times3=\frac{c}{a}$，所以 $b=-2a,c=-3a$，故 A 错误；因为 $2\in\{x|-1<x<3\}$，所以 $4a+2b+c>0$，故 B 错误；因为 $a<0$，所以不等式 $ax+c>0$ 可化为 $x<-\frac{c}{a}$，而 $c=-3a$，所以 $x<3$，故 C 正确；不等式 $bx^2-cx-a>0$ 可化为 $-2ax^2+3ax-a>0$，即 $2x^2-3x+1>0$，解得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$，故 D 错误.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案**　ABC

命题意图　本题考查空集的意义.

解析　集合 A 中有两个元素：0 和 $\varnothing$，则 A，B 正确；$\varnothing$ 是任何非空集合的真子集，故 C 正确.

10. **答案**　BCD

命题意图　本题考查不等式的基本性质.

解析　因为 $a<-1,c>1$，不能判断 $|a|$ 和 $|c|$ 的大小，故 A 错误；由 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，$b-a>0,ab>0$，得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 B 正确；$\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}=\frac{(a-b)c}{(c-a)(c-b)}$，因为 $a-b<0,c-a>0,c-b>0,c>1$，所以 $\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}<0$，故 C 正确；$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$ 因为 $a-b<0,c>1,b<0,b+c>0$，所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}>0$，故 D 正确.

11. **答案**　AD

命题意图　本题考查命题的否定.

解析　对于 A，由存在量词命题的否定形式可得“$\exists x>0$，使得 $x^2-6x-12=0$”的否定为“$\forall x>0,x^2-6x-12\neq0$”，故 A 正确；

对于 B，全称量词命题的否定为存在量词命题，故 p 的否定为“$\exists x>0,x(x-4)\leqslant0$”，故 B 错误；

对于 C，原命题的否定为“存在一个平行四边形的四个顶点不在同一个圆上”，为真命题，故 C 错误；

对于 D，对于两个等底等高的三角形，它们面积相等但不全等，故原命题为真命题，其否定为假命题，故 D 正确.

12. **答案**　ABC

命题意图　本题考查解一元二次方程和充要条件.

解析　对于 A，由题意得 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1x_2=k-2<0,\end{cases}$ 解得 $k<2$，故 A 正确；

对于 B，由题意得 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1+x_2=-(2-k)>0,\\ x_1x_2=k-2>0,\end{cases}$ 解得 $k>6$，故 B 正确；

对于 C，若方程无实数根，则 $\Delta<0$，解得 $2<k<6$，该条件的一个充分条件可以是 $k\in\{k|3<k<5\}$，故 C 正确；

对于 D，当 $k=3$ 时，$\Delta=(-1)^2-4\times1=-3<0$，方程无实数根，故 D 错误.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　$\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<\frac{7}{6}\right\}$

命题意图　本题考查解分式不等式.

解析　由$\frac{4}{2x-1}>3$可得$\frac{6x-7}{2x-1}<0$,解得$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{6}$.

14. 答案　$\frac{1}{2}$

命题意图　本题考查集合间的关系及集合的运算.

解析　由题意得$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\geqslant 2a\}$. 因为$B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$,所以$1\geqslant 2a$,解得$a\leqslant\frac{1}{2}$,故$a$的最大值为$\frac{1}{2}$.

15. 答案　-4

命题意图　本题考查量词和命题的真假判断.

解析　因为命题“$\forall x\leqslant 2,x^2-4x>m$”是假命题,所以命题“$\exists x\leqslant 2,x^2-4x\leqslant m$”是真命题,而当$x\leqslant 2$时,$x^2-4x=(x-2)^2-4\geqslant -4$,所以$m\geqslant -4$,即$m$的最小值是$-4$.

16. 答案　$\{k|k<-2或k>7\}$

命题意图　本题考查存在量词命题和基本不等式.

解析　因为a,b为正实数,且满足$\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以$\frac{a}{3}+b=\left(\frac{a}{3}+b\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{3b}{a}+\frac{a}{3b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{3b}{a}\cdot\frac{a}{3b}}=4$,当且仅当$\frac{3b}{a}=\frac{a}{3b}$,即$a=6,b=2$时,等号成立. 因为存在$a,b$使$\frac{a}{3}+b<k^2-5k-10$成立,故只需$k^2-5k-10>\left(\frac{a}{3}+b\right)_{最小值}$,即$k^2-5k-10>4$,解得$k<-2$或$k>7$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查命题及其否定,命题真假的判断.

解析　(Ⅰ)全称量词命题. ………………………………(1 分)

其否定为:存在$x\in\mathbf{R},x^2+4x+3<0$. ………………………………(3 分)

由方程$x^2+4x+3=0$可得$\Delta=4^2-12=4>0$,所以对任意$x\in\mathbf{R},x^2+4x+3\geqslant 0$为假命题,故否定为真命题.

………………………………(5 分)

(Ⅱ)存在量词命题. ………………………………(6 分)

其否定为:对任意$x\in\mathbf{R},x^2+2x+5\neq 0$. ………………………………(8 分)

因为$x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$,所以对任意$x\in\mathbf{R},x^2+2x+5\neq 0$,

故否定为真命题. ………………………………(10 分)

18. 命题意图　本题考查命题真假的判断.

解析　若p为真命题,则$\forall x\in\{x|-2<x<1\},m\geqslant\frac{x}{2}$恒成立,

因为$x\in\{x|-2<x<1\}$,所以$-1<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}$,

故要使$\forall x\in\{x|-2<x<1\},m\geqslant\frac{x}{2}$恒成立,则须$m\geqslant\frac{1}{2}$. ………………………………(4 分)

因为q是假命题,所以q的否定为真命题,即“$\exists x\in\mathbf{R}$,使得$x^2+(m-1)x+1-m=0$”为真命题,

所以$x^2+(m-1)x+1-m=0$有实根,

所以$\Delta=(m-1)^2-4(1-m)=m^2+2m-3\geqslant 0$,解得$m\leqslant -3$或$m\geqslant 1$. ………………………………(10 分)

综上,实数m的取值范围为$\{m|m\geqslant 1\}$. ………………………………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查集合的运算.

解析 (Ⅰ)当 $m=1$ 时,$A=\{(x,y)|y=x^2-2\}$, ……………………………………………… (1 分)

联立 $\begin{cases}y=x^2-2,\\ y=x+4,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-x-6=0$,解得 $x=-2$ 或 3. ……………………………… (3 分)

当 $x=-2$ 时,$y=2$;当 $x=3$ 时,$y=7$. ……………………………………………………… (4 分)

故 $A\cap B=\{(-2,2),(3,7)\}$. …………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)联立 $\begin{cases}y=mx^2-2,\\ y=x+4,\end{cases}$ 得 $mx^2-x-6=0$,

因为 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,所以方程有唯一解. ……………………………………………… (6 分)

可以分两种情况考虑:

①当 $m=0$ 时,方程 $-x-6=0$ 只有一个根,符合题意; ……………………………………………… (8 分)

②当 $m\neq0$ 时,方程 $mx^2-x-6=0$ 有两个相等的实数根,即 $\Delta=0$,

从而可得 $\Delta=(-1)^2+24m=0$,解得 $m=-\dfrac{1}{24}$. …………………………………………… (10 分)

故实数 $m=0$ 或 $-\dfrac{1}{24}$. …………………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查集合的运算及充分、必要条件.

解析 (Ⅰ)因为 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=B$,所以 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$, ……………………………………… (1 分)

因为 $A=\{x|x^2-4x-12\leqslant0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant6\}$ ……………………………………………… (2 分)

所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<-2$ 或 $x>6\}$ ……………………………………………………… (3 分)

当 $B=\varnothing$ 时,$a-7\geqslant2a$,得 $a\leqslant-7$. …………………………………………………… (4 分)

当 $B\neq\varnothing$ 时,$a>-7$,且 $2a\leqslant-2$ 或 $a-7\geqslant6$,即 $-7<a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant13$, ………………… (5 分)

所以实数 a 的取值范围是 $\{a|a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant13\}$. ……………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由 $x\in\complement_{\mathbf{R}}B$ 是 $x\in\complement_{\mathbf{R}}A$ 的充分不必要条件,得 $\complement_{\mathbf{R}}B\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}A$,即 $A\subsetneqq B$, ……………… (8 分)

由(Ⅰ)知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant6\}$,又因为 $B=\{x|a-7<x<2a,a\in\mathbf{R}\}$,

所以 $\begin{cases}a-7<-2,\\ 2a>6,\end{cases}$ …………………………………………………………………………… (10 分)

解得 $3<a<5$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a|3<a<5\}$. ………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查一元二次不等式和基本不等式的应用.

解析 设第 x 年时,该海水养殖场的总利润为 y 万元.

(Ⅰ)由题意可得 $y=130x-5x(x+6)-180=-5x^2+100x-180$, ……………………………………… (2 分)

令 $y>0$,得 $-5x^2+100x-180>0$,即 $x^2-20x+36<0$,解得 $2<x<18$. ………………………… (3 分)

因为 $x\in\mathbf{N}^*$,所以该海水养殖场从第 3 年起开始盈利. ………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)$y=-5x^2+100x-180=-5(x-10)^2+320$, ………………………………………………… (6 分)

所以当 $x=10$,即第 10 年时,总利润达到最大,最大值为 320 万元. ……………………………… (7 分)

(Ⅲ)设年平均利润为 W 万元,

则 $W=\dfrac{y}{x}=100-5\left(x+\dfrac{36}{x}\right)\leqslant100-5\times2\sqrt{x\cdot\dfrac{36}{x}}=40$, ……………………………… (9 分)

当且仅当 $x=\frac{36}{x}$,即 $x=6$ 时等号成立. ………………………………………………………………………… (10 分)

所以,第 6 年时,年平均利润达到最大,最大值为 40 万元. ………………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查一元二次方程中根与系数的关系.

解析 (Ⅰ)当 $p=q=1$ 时,原方程为 $3mx^2+3x+4=0$, ………………………………………………………… (1 分)

因为方程有两个不等实根 x_1,x_2,所以 $\Delta=3^2-4\times3m\times4>0$,解得 $m<\frac{3}{16}$,

故实数 m 的取值范围为 $\left\{m\,\middle|\,m<\frac{3}{16}\right\}$ ………………………………………………………………… (3 分)

(Ⅱ)将 $m=-\frac{p}{3},q=\frac{1-p}{4}$ 代入 $3mx^2+3px+4q=0$,

可得 $px^2-3px+p-1=0$,

则 $p\neq0$,且 $\Delta=(-3p)^2-4p(p-1)=p(5p+4)>0$, …………………………………………………………… (4 分)

解得 $p<-\frac{4}{5}$ 或 $p>0$.

因为 x_1,x_2 为两个整数根,p 为整数,

所以 $x_1+x_2=3,x_1x_2=\frac{p-1}{p}=1-\frac{1}{p}$ 为整数,

所以 $p=-1$ 或 1. ……………………………………………………………………………………………… (5 分)

把 $p=1$ 代入方程 $px^2-3px+p-1=0$,得 $x^2-3x=0$,解得 $x_1=0,x_2=3$;

把 $p=-1$ 代入方程 $px^2-3px+p-1=0$,得 $-x^2+3x-2=0$,解得 $x_1=1,x_2=2$. …………………………… (6 分)

综上,当 $p=1$ 时,$x_1=0,x_2=3$;当 $p=-1$ 时,$x_1=1,x_2=2$. ……………………………………………… (7 分)

(Ⅲ)因为 $m=1$,所以 $3x^2+3px+4q=0$.

又方程 $3x^2+3px+4q=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2,

所以 $\Delta=(3p)^2-4\times3\times4q>0$,整理得 $p^2>\frac{16}{3}q$. ………………………………………………… (8 分)

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-p,x_1x_2=\frac{4}{3}q$.

由 $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+1$ 可得 $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2-1=0$,

所以 $(-p)^2-3\cdot\frac{4}{3}q-1=0$,整理得 $p^2=4q+1$, …………………………………………………………… (10 分)

所以 $4q+1>\frac{16}{3}q$,解得 $q<\frac{3}{4}$,则 $p^2<4\times\frac{3}{4}+1=4$,

所以 $-2<p<2$,即 p 的取值范围为 $\{p\mid-2<p<2\}$. ………………………………………………………… (12 分)