

高三年级 2024 年 2 月考试

数 学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. $(3+i)(1+2i)=$

- A. $1+5i$ B. $1+7i$ C. $5+5i$ D. $5+7i$

2. 已知集合 $A=\{x|y=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\}$, $B=\{x|x=a^2+\frac{1}{a^2+1}\}$, 则 $A\cap B=$

- A. $[1,4)$ B. $[1,4]$ C. $[2,4)$ D. $[2,4]$

3. “ α 是第二象限角”是“ $\sin \alpha \tan \alpha < 0$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 l, m 是不重合的两条直线, α, β 是不重合的两个平面, 则下列结论正确的是

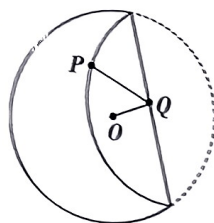
- A. 若 $\alpha \cap \beta = l, m \subset \alpha, m \perp l$, 则 $\alpha \perp \beta$
B. 若 $l \perp m, m \parallel \alpha$, 则 $l \perp \alpha$
C. 若 $\alpha \cap \beta = l, m \subset \alpha, l \parallel m$, 则 $m \parallel \beta$
D. 若 $l \subset \alpha, m \subset \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $l \parallel m$

5. 我们把形如 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 和 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个双曲线叫做共

轭双曲线. 已知 C_1 与 C_2 互为共轭双曲线, 且 C_1 的离心率 $e_1 = \sqrt{3}$, 则 C_2 的离心率 $e_2 =$

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

6. 折纸既是一种玩具,也是一种艺术品,更是一种思维活动. 如图,有一张直径为 4 的圆形纸片,圆心为 O ,在圆内任取一点 P ,折叠纸片,使得圆周上某一点刚好与点 P 重合,记此时的折痕为 l ,点 Q 在 l 上,则 $|OQ| + |PQ|$ 的最小值为



- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的高, 且向量 $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 7)$, 则向量 $\overrightarrow{AD} =$

- A. $(3.5, 3.5)$ B. $(3.5, 4.5)$ C. $(4, 3)$ D. $(4, 4)$

考号

姓名

班级

学校

题
答
要
不
内
线
封
密

8. 已知 $\sin a + 2^a = \sin b + 3^b = 2$, 则

A. $\text{blg } a > \text{alg } b > \text{blg } b$

B. $\text{blg } a > \text{blg } b > \text{alg } b$

C. $\text{alg } b > \text{blg } a > \text{blg } b$

D. $\text{alg } b > \text{blg } b > \text{blg } a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x + \frac{\pi}{6})$ 图象的对称轴方程可能为 $x =$

A. 0

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. π

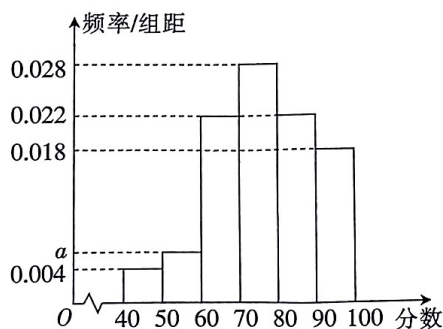
10. 一家公司为了了解客户对公司新产品的满意度, 随机选取了 m 名客户进行评分调查, 根据评分数进行适当分组后(每组为左闭右开的区间), 画出的频率分布直方图如图所示, 其中有 8 名客户的评分数落在 $[40, 50)$ 内, 则

A. 图中的 $a = 0.006$

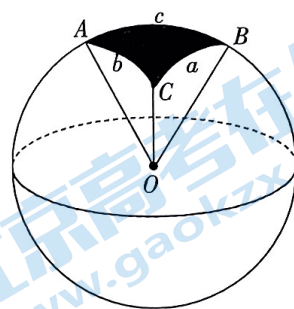
B. $m = 200$

C. 同组数据用该组区间的中点值作代表, 则评分数的平均数为 76.2

D. 该公司计划邀请评分数低于第 25 百分位数的客户参与产品改进会议, 若客户甲的评分数为 71, 则甲将会被邀请参与产品改进会议



11. 球面三角学是研究球面三角形的边、角关系的一门学科. 如图, 球 O 的半径为 R , A, B, C 为球面上三点, 劣弧 BC 的弧长记为 a , 设 O_a 表示以 O 为圆心, 且过 B, C 的圆, 同理, 圆 O_b, O_c 的劣弧 AC, AB 的弧长分别记为 b, c , 曲面 ABC (阴影部分) 叫做曲面三角形, 若 $a = b = c$, 则称其为曲面等边三角形, 线段 OA, OB, OC 与曲面 $\triangle ABC$ 围成的封闭几何体叫做球面三棱锥, 记为球面 $O-ABC$. 设 $\angle BOC = \alpha, \angle AOC = \beta, \angle AOB = \gamma$, 则下列结论正确的是



A. 若平面 $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ 的等边三角形, 则 $a = b = c = R$

B. 若 $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

C. 若 $a = b = c = \frac{\pi}{3}R$, 则球面 $O-ABC$ 的体积 $V > \frac{\sqrt{2}}{12}R^3$

D. 若平面 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 则 $a^2 + b^2 > c^2$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x-1) - f(1-x) = 2x - 2$, $f'(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 则

A. $f'(0) = 1$

B. $y = f(x) - x$ 为偶函数

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

D. $f'(2024) = -2023$

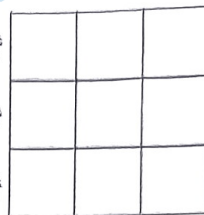
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的顶点到它准线的距离为 ▲ .

14. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的最小值为 0, 则 $a =$ ▲ .

15. 单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_4 - S_2 = 12, a_2 a_5 = 32$, 则 $S_5 =$ ▲ .

16. 将 1, 2, 3, ..., 9 这 9 个数填入如图所示的格子中(要求每个数都要填入, 每个格子中只能填一个数), 记第 1 行中最大的数为 a , 第 2 行中最大的数为 b , 第 3 行中最大的数为 c , 则 $a < b < c$ 的填法共有 ▲ 种.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a(\cos B - 2) + b \cos A = 0$.

(1) 求 $\frac{a}{c}$ 的值;

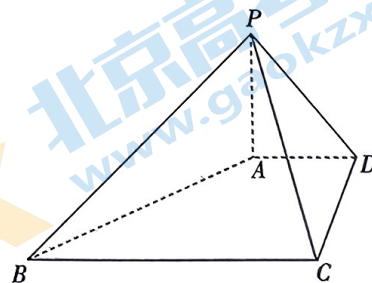
(2) 若 $a = 3, A = \frac{\pi}{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, AD \perp CD, PA = AD = 1, CD = \sqrt{3}, BC = 4$.

(1) 证明: $AB \perp PC$.

(2) 求直线 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值.



19. (12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \dots + 2^{n-1} a_n = 2^{n+1} a_{n+1}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \begin{cases} \log_3(4^{n-1} a_n), & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n \times 3^n}{a_{n+1}}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_{2n} .

20. (12分)

某学校组织知识竞赛,题库中试题分 A, B 两种类型,每个学生选择 2 题作答,第 1 题从 A, B 两种试题中随机选择一题作答,学生若答对第 1 题,则第 2 题选择同一种试题作答的概率为 $\frac{2}{3}$,若答错第 1 题,则第 2 题选择同一种试题作答的概率为 $\frac{1}{4}$. 已知学生甲答对 A 种试题的概率均为 $\frac{1}{2}$,答对 B 种试题的概率均为 $\frac{2}{3}$,且每道试题答对与否相互独立.

(1)求学生甲 2 题均选择 B 种试题作答的概率;

(2)若学生甲第 1 题选择 A 种试题作答,记学生甲答对的试题数为 X ,求 X 的分布列与期望.

21. (12分)

已知 A_1, A_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, P 是椭圆 E 的上顶点,且 $\angle PA_1A_2 = 30^\circ$, $\triangle PA_1A_2$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 E 的方程.

(2) O 为坐标原点,斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 相交于 M, N 两点,直线 OM, ON 的斜率分别为 k_1, k_2 . 是否存在常数 λ ,使得 $\frac{k_1 + k_2}{1 - \lambda k_1 k_2}$ 为定值? 若存在,求出 λ 的值;若不存在,说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = (x+a)\ln x - \frac{a}{2}x^2 - x (a > 0)$.

(1)当 $a=2$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2)当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,证明: $f(x)$ 恰有三个不同的极值点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 x_2 x_3 = 1$.

参考数据: 取 $\ln 2 = 0.7$.