学校______ 班级______ 姓名______ 学号______

密 封 线 内 不 要 答 题

北京市西城区 2017 — 2018 学年度第一学期期末试卷

高三数学(文科)

2018.1

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A=\{x\,|\,0<x<3\}$，$B=\{x\,|\,-1<x<2\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{x\,|\,-1<x<3\}$　　(B) $\{x\,|\,-1<x<0\}$

(C) $\{x\,|\,0<x<2\}$　　(D) $\{x\,|\,2<x<3\}$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为

(A) $(1,1)$　　(B) $(-1,1)$

(C) $(-1,-1)$　　(D) $(1,-1)$

3. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y=-x+1$　　(B) $y=(x-1)^2$

(C) $y=\sin x$　　(D) $y=x^{\frac{1}{2}}$

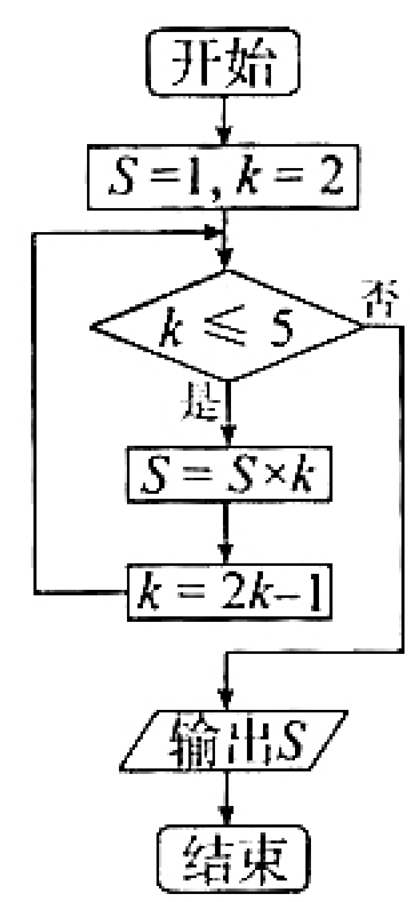
4. 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为

(A) 2

(B) 6

(C) 30

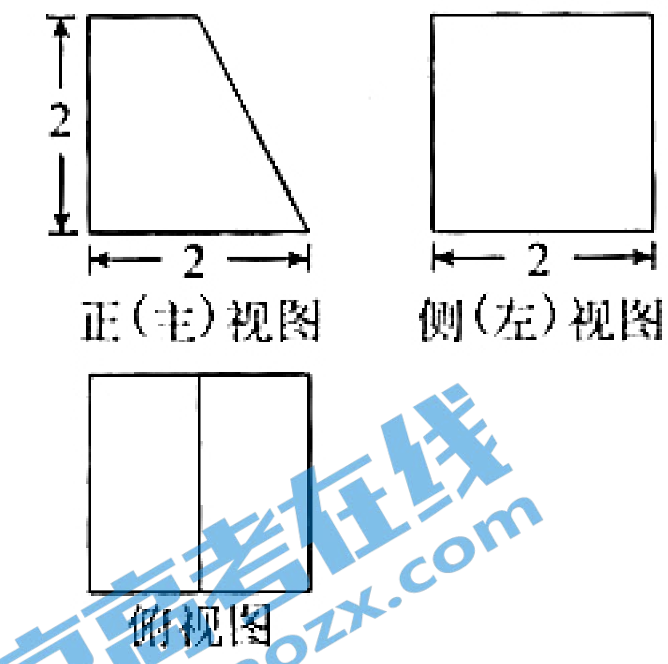
(D) 270



5. 若 $\log_2 a+\log_{\frac{1}{2}} b=2$，则有

(A) $a=2b$　　(B) $b=2a$　　(C) $a=4b$　　(D) $b=4a$

6. 一个棱长为 2 的正方体被一个平面截去一部分后，剩余几何体的三视图如图所示，则截去的几何体是



(A) 三棱锥

(B) 三棱柱

(C) 四棱锥

(D) 四棱柱

7. 函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 的图象记为曲线 C. 则 "$f(0)=f(\pi)$" 是 "曲线 C 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称" 的

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知 A，B 是函数 $y=2^x$ 的图象上的相异两点. 若点 A，B 到直线 $y=\frac{1}{2}$ 的距离相等，则点 A，B 的横坐标之和的取值范围是

(A) $(-\infty,-1)$ (B) $(-\infty,-2)$

(C) $(-\infty,-3)$ (D) $(-\infty,-4)$

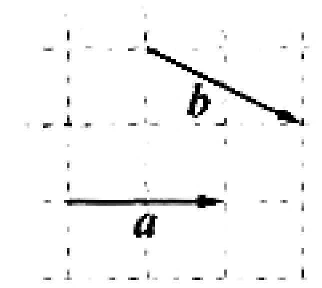
第Ⅱ卷(非选择题　共 110 分)

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 若函数 $f(x)=x(x+b)$ 是偶函数，则实数 $b=$____.

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点是 $F(2,0)$，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，该双曲线的方程是____.

11. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示. 如果小正方形网格的边长为 1，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$____.



12. 在△ABC 中，$a=3$，$\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$，△ABC 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，则 $b=$____；$c=$____.

13. 已知点 $M(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x-1\leqslant 0,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0.\end{cases}$ 设 O 为原点，则 $|OM|$ 的最小值是____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & -2\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{1}{x}, & c<x\leqslant 3.\end{cases}$ 若 $c=0$，则 $f(x)$ 的值域是____；若 $f(x)$ 的值域是 $[-\dfrac{1}{4},2]$，则实数 c 的取值范围是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin^2 x-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求证：当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f(x)\geqslant -\frac{1}{2}$．

16.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，且 a_2+6 是 a_1 和 a_3 的等差中项．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n，求 T_n 的最大值．

17.（本小题满分 13 分）

某市高中全体学生参加某项测评，按得分评为 A，B 两类（评定标准见表 1）．根据男女学生比例，使用分层抽样的方法随机抽取了 10000 名学生的得分数据，其中等级为 A_1 的学生中有 40%是男生，等级为 A_2 的学生中有一半是女生．等级为 A_1 和 A_2 的学生统称为 A 类学生，等级为 B_1 和 B_2 的学生统称为 B 类学生．整理这 10000 名学生的得分数据，得到如图 2 所示的频率分布直方图．

类别		得分(x)
B	B_1	$80\leqslant x\leqslant 90$
	B_2	$70\leqslant x<80$
A	A_1	$50\leqslant x<70$
	A_2	$20\leqslant x<50$

表 1

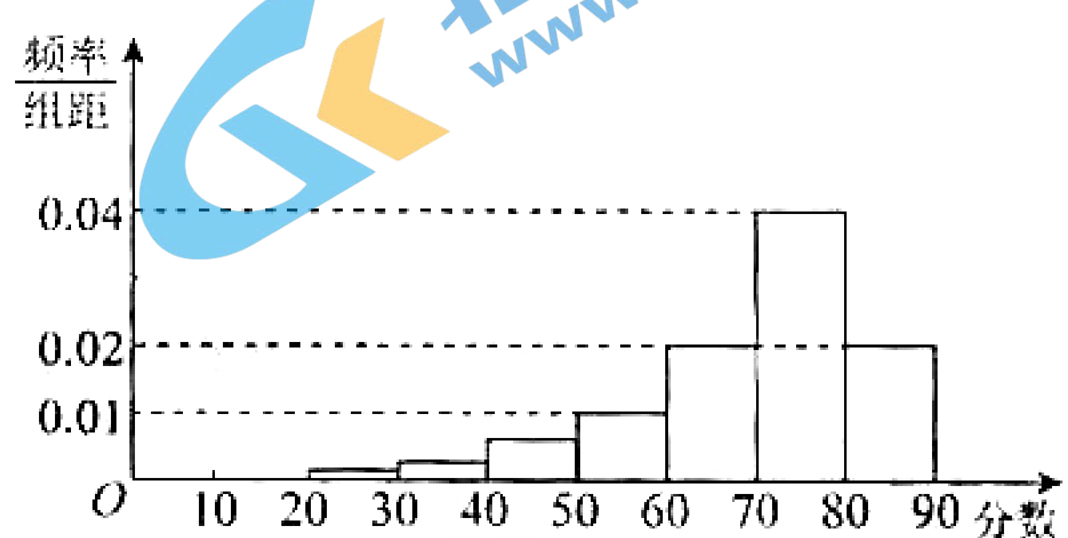


图 2

（Ⅰ）已知该市高中学生共 20 万人，试估计在该项测评中被评为 A 类学生的人数；

（Ⅱ）某 5 人得分分别为 45，50，55，75，85．从这 5 人中随机选取 2 人组成甲组，另外 3 人组成乙组，求"甲、乙两组各有 1 名 B 类学生"的概率；

（Ⅲ）在这 10000 名学生中，男生占总数的比例为 51%，B 类女生占女生总数的比例为 k_1，B 类男生占男生总数的比例为 k_2．判断 k_1 与 k_2 的大小．（只需写出结论）

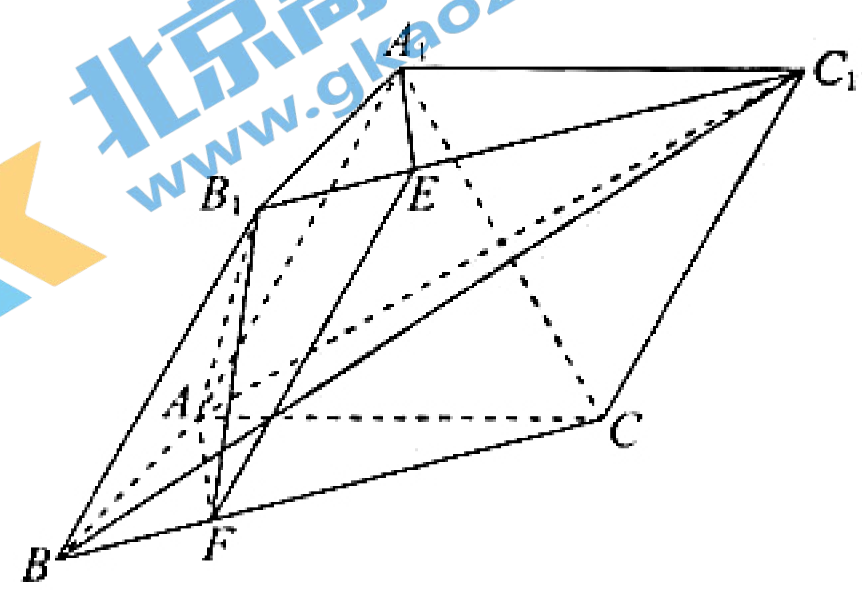
18.（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp$平面 AA_1C_1C，$AA_1=AC$. 过 AA_1 的平面交 B_1C_1 于点 E，交 BC 于点 F.

（Ⅰ）求证：$A_1C\perp$平面 ABC_1；

（Ⅱ）求证：$A_1A /\!/ EF$；

（Ⅲ）记四棱锥 B_1-AA_1EF 的体积为 V_1，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V. 若 $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{1}{6}$，求 $\dfrac{BF}{BC}$ 的值.



19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过 $A(2,0)$，$B(0,1)$ 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程及离心率；

（Ⅱ）设点 Q 在椭圆 C 上. 试问直线 $x+y-4=0$ 上是否存在点 P，使得四边形 $PAQB$ 是平行四边形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^2\ln x-2x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f(2)-f(1)$；

（Ⅲ）比较 $f(1.01)$ 与 -2.01 的大小，并加以证明.

北京市西城区 2017 — 2018 学年度第一学期期末

高三数学（文科）参考答案及评分标准

2018.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．A　　2．B　　3．D　　4．C

5．C　　6．B　　7．C　　8．B

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．0　　10．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　11．4

12．1；$\sqrt{13}$　　13．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　14．$[-\frac{1}{4},+\infty)$；$[\frac{1}{2},1]$

注：第 12，14 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sin^2 x-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

$=1-\cos 2x-(\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{3})$　　［4 分］

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x+1$　　［5 分］

$=\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1$，　　［7 分］

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　　［8 分］

（Ⅱ）因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.　　［10 分］

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})\geqslant\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　［12 分］

所以 $f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.　　［13 分］

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 a_2+6 是 a_1 和 a_3 的等差中项，

所以 $2(a_2+6)=a_1+a_3$． [2 分]

因为数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $2(\frac{a_1}{3}+6)=a_1+\frac{a_1}{9}$， [4 分]

解得 $a_1=27$． [6 分]

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=(\frac{1}{3})^{n-4}$． [8 分]

（Ⅱ）令 $a_n\geqslant 1$，即 $(\frac{1}{3})^{n-4}\geqslant 1$，得 $n\leqslant 4$， [10 分]

故正项数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项大于 1，第 4 项等于 1，以后各项均小于 1． [11 分]

所以 当 $n=3$，或 $n=4$ 时，T_n 取得最大值， [12 分]

T_n 的最大值为 $T_3=T_4=a_1\cdot a_2\cdot a_3=729$． [13 分]

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）依题意得，样本中 B 类学生所占比例为 $(0.02+0.04)\times 10=60\%$， [2 分]

所以 A 类学生所占比例为 40%． [3 分]

因为全市高中学生共 20 万人，

所以在该项测评中被评为 A 类学生的人数约为 8 万人． [4 分]

（Ⅱ）由表 1 得，在 5 人（记为 a,b,c,d,e）中，B 类学生有 2 人（不妨设为 b,d）．

将他们按要求分成两组，分组的方法数为 10 种． [6 分]

依次为：$(ab,cde),(ac,bde),(ad,bce),(ae,bcd),(bc,ade),(bd,ace),(be,acd),(cd,abe),$

$(ce,abd),(de,abc)$． [8 分]

所以“甲、乙两组各有一名 B 类学生”的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$． [10 分]

（Ⅲ）$k_1<k_2$． [13 分]

18.（本小题满分 14 分）

解:（Ⅰ）因为 $AB\perp$平面AA_1C_1C，所以 $A_1C\perp AB$． ［2 分］

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，因为 $AA_1=AC$，所以四边形AA_1C_1C为菱形，

所以 $A_1C\perp AC_1$． ［3 分］

所以 $A_1C\perp$平面ABC_1． ［5 分］

（Ⅱ）在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，

因为 $A_1A/\!/B_1B$，$A_1A\not\subset$平面BB_1C_1C， ［6 分］

所以 $A_1A/\!/$平面BB_1C_1C． ［8 分］

因为平面$AA_1EF\cap$平面$BB_1C_1C=EF$，

所以 $A_1A/\!/EF$． ［10 分］

（Ⅲ）记三棱锥B_1-ABF的体积为V_2，三棱柱$ABF-A_1B_1E$的体积为V_3．

因为三棱锥B_1-ABF与三棱柱$ABF-A_1B_1E$同底等高，

所以 $\dfrac{V_2}{V_3}=\dfrac{1}{3}$， ［11 分］

所以 $\dfrac{V_1}{V_3}=1-\dfrac{V_2}{V_3}=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{1}{6}$，　所以 $\dfrac{V_3}{V}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{4}$. ［12 分］

因为三棱柱$ABF-A_1B_1E$与三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$等高，

所以$\triangle ABF$与$\triangle ABC$的面积之比为$\dfrac{1}{4}$， ［13 分］

所以 $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{1}{4}$. ［14 分］

19.（本小题满分 14 分）

解:（Ⅰ）由题意得，$a=2$，$b=1$． ［2 分］

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ［3 分］

设椭圆C的半焦距为c，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$， ［4 分］

所以椭圆C的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ［5 分］

（Ⅱ）由已知，设 $P(t,4-t)$，$Q(x_0,y_0)$． ［6 分］

若 $PAQB$ 是平行四边形，则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PQ}$， ［8 分］

所以 $(2-t,t-4)+(-t,t-3)=(x_0-t,y_0-4+t)$，

整理得 $x_0=2-t$，$y_0=t-3$． ［10 分］

将上式代入 $x_0^2+4y_0^2=4$，

得 $(2-t)^2+4(t-3)^2=4$， ［11 分］

整理得 $5t^2-28t+36=0$，

解得 $t=\frac{18}{5}$，或 $t=2$． ［13 分］

此时 $P(\frac{18}{5},\frac{2}{5})$，或 $P(2,2)$．经检验，符合四边形 $PAQB$ 是平行四边形，

所以存在 $P(\frac{18}{5},\frac{2}{5})$，或 $P(2,2)$ 满足题意． ［14 分］

20．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)=x^2\ln x-2x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

导函数为 $f'(x)=2x\ln x+x-2$． ［1 分］

所以 $f'(1)=-1$． 又 $f(1)=-2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x-1$． ［3 分］

（Ⅱ）由已知 $f(2)-f(1)=4\ln 2-2$． ［4 分］

所以只需证明方程 $2x\ln x+x-2=4\ln 2-2$ 在区间 $(1,2)$ 有唯一解．

即方程 $2x\ln x+x-4\ln 2=0$ 在区间 $(1,2)$ 有唯一解． ［5 分］

设函数 $g(x)=2x\ln x+x-4\ln 2$， ［6 分］

则 $g'(x)=2\ln x+3$．

当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增． ［7 分］

又 $g(1)=1-4\ln 2<0$，$g(2)=2>0$，

所以 存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得 $g(x_0)=0$． ［8 分］

综上，存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f(2)-f(1)$． ［9 分］

(III) $f(1.01) > -2.01$. 证明如下： [10 分]

首先证明：当 $x > 1$ 时， $f(x) > -x-1$.

设 $h(x) = f(x) - (-x-1) = x^2 \ln x - x + 1$ ， [11 分]

则 $h'(x) = x + 2x\ln x - 1$.

当 $x > 1$ 时， $x - 1 > 0$ ， $2x\ln x > 0$ ，

所以 $h'(x) > 0$ ，故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增， [12 分]

所以 $x > 1$ 时，有 $h(x) > h(1) = 0$ ，

即当 $x > 1$ 时，有 $f(x) > -x-1$.

所以 $f(1.01) > -1.01 - 1 = -2.01$. [13 分]