丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（二）

数　学（理科）

2017. 05

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 4\}$，$B=\{x|x>2\}$，那么 $A\cup B=$

（A）$(2,4)$　（B）$(2,4]$　（C）$[1,+\infty)$　（D）$(2,+\infty)$

2. 下列函数中，既是偶函数又是 $(0,+\infty)$ 上的增函数的是

（A）$y=-x^3$　（B）$y=2^{|x|}$

（C）$y=x^{\frac{1}{2}}$　（D）$y=\log_3(-x)$

3. 在极坐标系中，点 $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ 到直线 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$ 的距离等于

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　（D）2

4. 下列双曲线中，焦点在 y 轴上且渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$ 的是

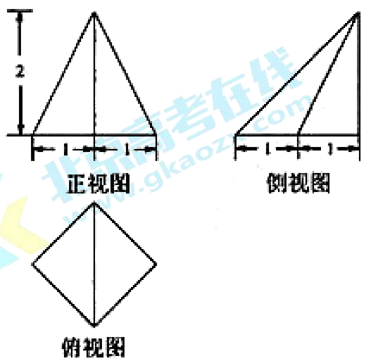
（A）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　（B）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　（C）$\frac{y^2}{4}-x^2=1$　（D）$y^2-\frac{x^2}{4}=1$

5. 已知向量 $a=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$b=(\sqrt{3},-1)$，则 a,b 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{4}$　　　　（B）$\frac{\pi}{3}$

（C）$\frac{\pi}{2}$　　　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

6. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正方形，则该几何体最大的侧面的面积为



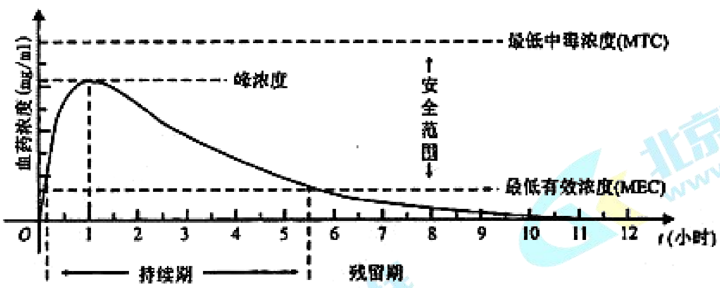
（A）1　　　　（B）$\sqrt{2}$

（C）$\sqrt{3}$　　　　（D）2

7. $S(A)$ 表示集合 A 中所有元素的和，且 $A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，若 $S(A)$ 能被 3 整除，则符合条件的非空集合 A 的个数是

（A）10　　　　（B）11　　　　（C）12　　　　（D）13

8. 血药浓度（Plasma Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度．药物在人体内发挥治疗作用时，该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间．已知成人单次服用 1 单位某药物后，体内血药浓度及相关信息如图所示：



根据图中提供的信息，下列关于成人使用该药物的说法中，不正确的个数是

①首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后，药物发挥治疗作用

②每次服用该药物 1 单位，两次服药间隔小于 2 小时，一定会产生药物中毒

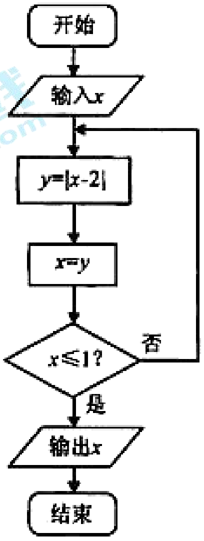
③每间隔 5.5 小时服用该药物 1 单位，可使药物持续发挥治疗作用

④首次服用该药物 1 单位 3 小时后，再次服用该药物 1 单位，不会发生药物中毒

（A）1 个　　　　（B）2 个　　　　（C）3 个　　　　（D）4 个

第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.



9. 在复平面内，复数$\dfrac{3+4i}{i}$对应的点的坐标为______.

10. 执行右图所示的程序框图，若输入x的值为 6，则输出的x值为______.

11. 点A从$(1,0)$出发，沿单位圆按逆时针方向运动到点B，若点B的坐标是$(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$，记$\angle AOB=\alpha$，则$\sin 2\alpha=$______.

12. 若x，y满足$\begin{cases} y\ge 1, \\ y\le x-1, \\ x+y\le m, \end{cases}$且$z=x^2+y^2$的最大值为 10，则$m=$______.

13. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$．当$x<0$时，$f(x)=\ln(-x)+x$；当$-e\le x\le e$时，$f(-x)=-f(x)$；当$x>1$时，$f(x+2)=f(x)$，则$f(8)=$______.

14. 已知O为$\triangle ABC$的外心，且$\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$.

①若$\angle C=90^\circ$，则$\lambda+\mu=$______；

②若$\angle ABC=60^\circ$，则$\lambda+\mu$的最大值为______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

在锐角$\triangle ABC$中，$2a\sin B=b$.

（Ⅰ）求$\angle A$的大小；

（Ⅱ）求$\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})$的最大值.

16.（本小题共 13 分）

某社区超市购进了A,B,C,D四种新产品，为了解新产品的销售情况，该超市随机调查了 15 位顾客（记为a_i，$i=1,2,3,\cdots,15$）购买这四种新产品的情况，记录如下（单位：件）：

顾客 / 产品	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
A	1			1				1			1			1	
B		1		1		1		1	1		1		1		1
C	1			1	1			1		1		1			1
D		1		1		1	1			1			1		

（Ⅰ）若该超市每天的客流量约为 300 人次，一个月按 30 天计算，试估计产品A的月销售量（单位：件）；

（Ⅱ）为推广新产品，超市向购买两种以上（含两种）新产品的顾客赠送 2 元电子红包．现有甲、乙、丙三人在该超市购物，记他们获得的电子红包的总金额为X，求随机变量X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）若某顾客已选中产品B，为提高超市销售业绩，应该向其推荐哪种新产品？（结果不需要证明）

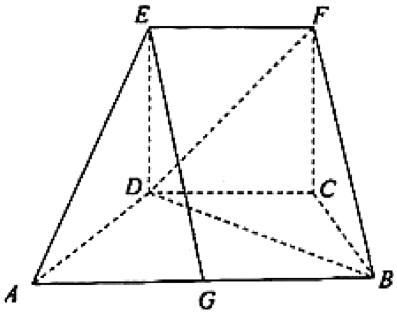
17.（本小题共 14 分）

如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB \parallel CD$，$AB=2AD=2$，$\angle DAB=60^\circ$，四边形 $CDEF$ 为正方形，平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅰ）若点 G 是棱 AB 的中点，求证：$EG\parallel$ 平面 BDF；

（Ⅱ）求直线 AE 与平面 BDF 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 FC 上是否存在点 H，使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD？若存在，求 $\dfrac{FH}{HC}$ 的值；若不存在，说明理由.



18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=e^x-a\ln x-a$.

（Ⅰ）当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）证明：对于 $\forall a\in(0,e)$，$f(x)$ 在区间 $(\dfrac{a}{e},1)$ 上有极小值，且极小值大于 0.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 E 的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合，点 $M(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 $P(-4,0)$，直线 $y=kx+1$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点，若直线 PA,PB 均与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，求 k 的值.

20.（本小题共 13 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$\exists k\in\mathbf{N}^*$，对于 $\forall n\geq n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$，都有 $a_{n+k}-a_n=d$（其中 d 为常数），则称 $\{a_n\}$ 具有性质"$P(k,n_0,d)$".

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 具有性质"$P(3,2,0)$"，且 $a_2=3$，$a_4=5$，$a_6+a_7+a_8=18$，求 a_3；

（Ⅱ）若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$b_1=c_3=2$，$b_3=c_1=8$，$a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质"$P(2,1,0)$"，并说明理由；

（Ⅲ）设 $\{a_n\}$ 既具有性质"$P(i,2,d_1)$"，又具有性质"$P(j,2,d_2)$"，其中 i，$j\in\mathbf{N}^*$，$i<j$，i,j 互质，求证：$\{a_n\}$ 具有性质"$P(j-i,i+2,\frac{j-i}{i}d_1)$".

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2016~2017 学年度第二学期二模练习

高三数学（理科）参考答案及评分参考

2017．05

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	B	C	B	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．$(4,-3)$　　10．0　　11．$-\frac{24}{25}$

12．4　　13．$2-\ln 2$　　14．$\frac{1}{2}$；$\frac{2}{3}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理得 $2\sin A\sin B=\sin B$，　…………………2 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，从而 $2\sin A=1$，　…………………3 分

所以 $\sin A=\frac{1}{2}$．

因为锐角 $\triangle ABC$，

所以 $A=\frac{\pi}{6}$．　…………………6 分

（Ⅱ）因为 $\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin B-\cos(A+C)$　…………………7 分

$=\sqrt{3}\sin B+\cos B$　…………………9 分

$=2\sin(B+\frac{\pi}{6})$，　…………………11 分

所以当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})$ 有最大值 2．　…………………13 分

16．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$\frac{5}{15}\times300\times30=3000$（件），　…………………3 分

答：产品 A 的月销售量约为 3000 件．　…………………4 分

（Ⅱ）顾客购买两种（含两种）以上新产品的概率为 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$．　…………………5 分

X 可取 0，2，4，6，　…………………6 分

$P(X=0)=(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$，　$P(X=2)=C_3^1(\frac{2}{5})^2\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$，

$P(X=4)=C_3^2(\frac{3}{5})^2\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$，　$P(X=6)=(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	2	4	6
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

……………8 分

所以 $E(X)=0\times\frac{8}{125}+2\times\frac{36}{125}+4\times\frac{54}{125}+6\times\frac{27}{125}=\frac{450}{125}=\frac{18}{5}$. ……………10 分

（III）产品 D. ……………13 分

17.（本小题共 14 分）

（Ⅰ）证明：由已知得 $EF\parallel CD$，且 $EF=CD$.

因为 $ABCD$ 为等腰梯形，所以有 $BG\parallel CD$.

因为 G 是棱 AB 的中点，所以 $BG=CD$.

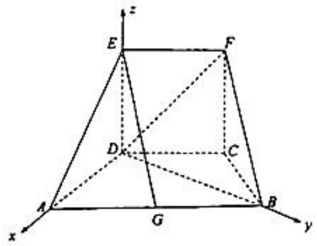
所以 $EF\parallel BG$，且 $EF=BG$，

故四边形 $EFBG$ 为平行四边形，

所以 $EG\parallel FB$. ……………2 分

因为 $FB\subset$ 平面 BDF，$EG\not\subset$ 平面 BDF，

所以 $EG\parallel$平面 BDF. ……………4 分



解：（II）因为四边形 $CDEF$ 为正方形，所以 $ED\perp DC$.

因为平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $CDEF\cap$ 平面 $ABCD=DC$，

$DE\subset$ 平面 $CDEF$，

所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$.

在△ ABD 中，因为 $\angle DAB=60^\circ$，$AB=2AD=2$，

所以由余弦定理，得 $BD=\sqrt{3}$，

所以 $AD\perp BD$. ……………5 分

在等腰梯形 $ABCD$ 中，可得 $DC=CB=1$.

如图,以 D 为原点，以 DA，DB，DE 所在直线分别为 x,y,z 轴，

建立空间坐标系， ……………6 分

则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$E(0,0,1)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$F(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{DF}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$，$\overrightarrow{DB}=(0,\sqrt{3},0)$.

设平面 BDF 的法向量为 $n=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DF}=0.\end{cases}$ ……………7 分

所以$\begin{cases}\sqrt{3}y=0\\ -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0\end{cases}$，取$z=1$，则$x=2,y=0$，得$n=(2,0,1)$. ………………8 分

设直线 AE 与平面 BDF 所成的角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AE},n\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot n\right|}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot|n|}$，

$=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ………………9 分

所以 AE 与平面 BDF 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$. ………………10 分

（Ⅲ）线段 FC 上不存在点 H，使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD．证明如下： ………………11 分

假设线段 FC 上存在点 H，设$H(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$ $(0\le t\le 1)$，

则$\overrightarrow{DH}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$．

设平面 HAD 的法向量为$m=(a,b,c)$，由$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{DH}=0.\end{cases}$

所以$\begin{cases}a=0\\ -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+tc=0\end{cases}$，

取$c=1$，则$a=0,b=-\frac{2}{\sqrt{3}}t$，得$m=(0,-\frac{2}{\sqrt{3}}t,1)$． ………………12 分

要使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD，只需$m\cdot n=0$， ………………13 分

即$2\times0-\frac{2}{\sqrt{3}}t\times0+1\times1=0$， 此方程无解.

所以线段 FC 上不存在点 H，使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD． ………………14 分

18.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$， ………………1 分

因为$a=\mathrm{e}$，所以$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}(\ln x+1)$，所以$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}}{x}$. ………………2 分

因为$f(1)=0$，$f'(1)=0$， ………………3 分

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=0$. ………………4 分

（Ⅱ） 因为$0<a<\mathrm{e}$,所以$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}$在区间$(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$上是单调递增函数. ………………5 分

因为$f'(\frac{a}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{\frac{a}{\mathrm{e}}}-\mathrm{e}<0$，$f'(1)=\mathrm{e}-a>0$， ………………6 分

所以$\exists x_0\in(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$,使得$\mathrm{e}^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$. ………………7 分

所以 $\forall x\in(\frac{a}{e},x_0)$，$f'(x)<0$；$\forall x\in(x_0,1)$，$f'(x)>0$， ……………………8 分

故 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{e},x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增， ……………………9 分

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(x_0)$． ……………………10 分

因为 $e^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，

所以 $f(x_0)=e^{x_0}-a(\ln x_0+1)=a(\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1)$． ……………………11 分

设 $g(x)=a(\frac{1}{x}-\ln x-1)$，$x\in(\frac{a}{e},1)$，

则 $g'(x)=a(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})=-\frac{a(1+x)}{x^2}$， ……………………12 分

所以 $g'(x)<0$，

即 $g(x)$ 在 $(\frac{a}{e},1)$ 上单调递减，所以 $g(x)>g(1)=0$，

即 $f(x_0)>0$，所以函数 $f(x)$ 的极小值大于 0. ……………………13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ） 因为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，所以 $c=1$， ……………………1 分

所以 $2a=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{3}{2})^2+2^2}=4$， ……………………3 分

即 $a=2$．因为 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……………………5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

因为直线 PA,PB 与圆 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 相切，

所以 $k_{AP}+k_{BP}=0$， ……………………7 分

即 $\frac{y_1}{x_1+4}+\frac{y_2}{x_2+4}=0$，

通分得 $\frac{y_1(x_2+4)+y_2(x_1+4)}{(x_1+4)(x_2+4)}=0$，

所以 $(kx_1+1)(x_2+4)+(kx_2+1)(x_1+4)=0$，

整理，得 $2kx_1x_2+(4k+1)(x_1+x_2)+8=0$． ① ……………………9 分

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{8}{3+4k^2}$， ……………………11 分

代入①，得 $k=1$． ……………………14 分

20.（本小题共13分）

解：（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 具有性质“$P(3,2,0)$”，所以 $a_{n+3}-a_n=0$，$n\geq 2$，

由 $a_2=3$，得 $a_2=a_5=3$，由 $a_4=5$，得 $a_7=5$，……………2分

因为 $a_4+a_5+a_6=18$，所以 $a_6=10$，即 $a_3=10$． ……………4分

（Ⅱ）$\{a_n\}$ 不具有性质“$P(2,1,0)$”． ……………

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由 $b_1=2$，$b_3=8$；

得 $2d=8-2=6$，所以 $d=3$，故 $b_n=3n-1$． ……………6

设等比数列 $\{c_n\}$ 的公比为 q，由 $c_3=2$，$c_1=8$，

得 $q^2=\frac{1}{4}$，又 $q>0$，所以 $q=\frac{1}{2}$，故 $c_n=2^{4-n}$， ……………7

所以 $a_n=3n-1+2^{4-n}$．

若 $\{a_n\}$ 具有性质“$P(2,1,0)$”，则 $a_{n+2}-a_n=0$，$n\geq 1$．

因为 $a_2=9$，$a_4=12$，所以 $a_2\neq a_4$，

故 $\{a_n\}$ 不具有性质“$P(2,1,0)$”． ……………

（Ⅲ）因为 $\{a_n\}$ 具有性质“$P(i,2,d_1)$”，所以 $a_{n+i}-a_n=d_1$，$n\geq 2$．①

因为 $\{a_n\}$ 具有性质“$P(j,2,d_2)$”，所以 $a_{n+j}-a_n=d_2$，$n\geq 2$．②

因为 $i,j\in N^*$，$i<j$，i,j 互质，

所以由①得 $a_{m+ij}=a_m+jd_1$；由②，得 $a_{m+ij}=a_m+id_2$， ……………

所以 $a_m+jd_1=a_m+id_2$，即 $d_2=\frac{j}{i}d_1$． ……………

②-①，得 $a_{n+j}-a_{n+i}=d_2-d_1=\frac{j-i}{i}d_1$，$n\geq 2$， ……………

[illegible] $=\frac{j-i}{i}d_1$，$n\geq i+2$， ……………

[illegible]“$P(j-i,i+2,\frac{j-i}{i}d_1)$”． ……………

扫描二维码，关注北京高考官方微信！

查看更多北京高考相关资讯！