2015年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分） 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$ 是实数，证明：可以选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{1,-1\}$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\leq(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

证法一： 我们证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i-\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2\leq(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right),\qquad ①$$

即对 $i=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$，取 $\varepsilon_i=1$；对 $i=\left[\frac{n}{2}\right]+1,\cdots,n$，取 $\varepsilon_i=-1$ 符合要求.（这里，$[x]$ 表示实数 x 的整数部分.） ……………………10 分

事实上，①的左边为

$$\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i+\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i-\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i\right)^2+2\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2$$

$$\leq 2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+2\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)\text{（柯西不等式）}$$ ……………30 分

$$=2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)\text{（利用 }n-\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]\text{）}$$

$$\leq n\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+(n+1)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)\text{（利用 }[x]\leq x\text{）}$$

$$\leq (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

所以①得证，从而本题得证． ……………………40 分

证法二：首先，由于问题中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的对称性，可设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$．此外，若将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的负数均改变符号，则问题中的不等式左边的 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ 不减，而右边的 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 不变，并且这一手续不影响 $\varepsilon_i = \pm 1$ 的选取，因此我们可进一步设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$． ……………………10 分

引理：设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$，则 $0 \leq \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \leq a_1$．

事实上，由于 $a_i \geq a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，故当 n 是偶数时，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n \leq a_1.$$

当 n 是奇数时，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{n-1} - a_n) \leq a_1.$$

引理得证． ……………………30 分

回到原题，由柯西不等式及上面引理可知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + a_1^2$$

$$\leq (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

这就证明了结论． ……………………40 分

二、（本题满分 40 分） 设 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合（$n\ge 2$），满足对任意 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\cup A_j\in S$．若 $k=\min\limits_{1\le i\le n}|A_i|\ge 2$．证明：存在 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，使得 x 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的至少 $\dfrac{n}{k}$ 个集合（这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数）．

证明：不妨设 $|A_1|=k$．设在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中与 A_1 不相交的集合有 s 个，重新记为 $B_1,B_2,\cdots,B_s$，设包含 A_1 的集合有 t 个，重新记为 $C_1,C_2,\cdots,C_t$．由已知条件，$(B_i\cup A_1)\in S$，即 $(B_i\cup A_1)\in\{C_1,C_2,\cdots,C_t\}$，这样我们得到一个映射

$$f:\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}\to\{C_1,C_2,\cdots,C_t\},\quad f(B_i)=B_i\cup A_1.$$

显然 f 是单映射，于是 $s\le t$． ……………………10 分

设 $A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$．在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中除去 $B_1,B_2,\cdots,B_s,C_1,C_2,\cdots,C_t$ 后，在剩下的 $n-s-t$ 个集合中，设包含 a_i 的集合有 x_i 个（$1\le i\le k$），由于剩下的 $n-s-t$ 个集合中每个集合与 A_1 的交非空，即包含某个 a_i，从而

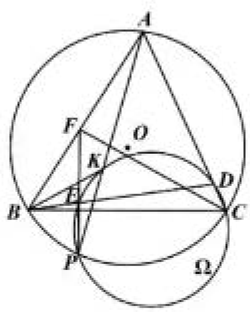
$$x_1+x_2+\cdots+x_k\ge n-s-t. \qquad \text{……………………20 分}$$

不妨设 $x_1=\max\limits_{1\le i\le k}x_i$，则由上式知 $x_1\ge\dfrac{n-s-t}{k}$，即在剩下的 $n-s-t$ 个集合中，包含 a_1 的集合至少有 $\dfrac{n-s-t}{k}$ 个．又由于 $A_1\subseteq C_i$（$i=1,\cdots,t$），故 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 都包含 a_1，因此包含 a_1 的集合个数至少为

$$\frac{n-s-t}{k}+t=\frac{n-s+(k-1)t}{k}\ge\frac{n-s+t}{k}\quad（利用 k\ge 2）$$

$$\ge\frac{n}{k}\quad（利用 t\ge s）. \qquad \text{……………………40 分}$$

三、（本题满分 50 分） 如图，ΔABC 内接于圆 O，P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，点 K 在线段 AP 上，使得 BK 平分 $\angle ABC$．过 K、P、C 三点的圆 Ω 与边 AC 交于点 D，连接 BD 交圆 Ω 于点 E，连接 PE 并延长与边 AB 交于点 F．证明：$\angle ABC=2\angle FCB$．



证法一：设 CF 与圆 Ω 交于点 L（异于 C），连接 PB、PC、BL、KL.

注意此时 C、D、L、K、E、P 六点均在圆 Ω 上，结合 A、B、P、C 四点共圆，可知

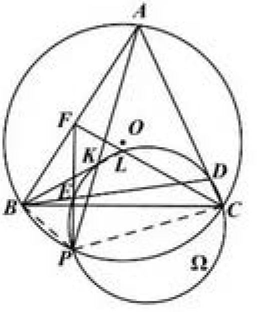
$$\angle FEB=\angle DEP=180^\circ-\angle DCP=\angle ABP=\angle FBP,$$

因此 $\Delta FBE\backsim\Delta FPB$，故 $FB^2=FE\cdot FP$. ……………………10 分

又由圆幂定理知，$FE\cdot FP=FL\cdot FC$，所以

$$FB^2=FL\cdot FC,$$

从而 $\Delta FBL\backsim\Delta FCB$. ……………………20 分



因此

$$\angle FLB=\angle FBC=\angle APC=\angle KPC=\angle FLK,$$

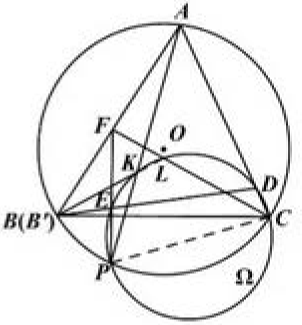
即 B、K、L 三点共线. ……………………30 分

再根据 $\Delta FBL\backsim\Delta FCB$ 得，

$$\angle FCB=\angle FBL=\angle FBE=\frac{1}{2}\angle ABC,$$

即 $\angle ABC=2\angle FCB$. ……………………50 分

证法二：设 CF 与圆 Ω 交于点 L（异于 C）. 对圆内接广义六边形 $DCLKPE$ 应用帕斯卡定理可知，DC 与 KP 的交点 A、CL 与 PE 的交点 F、LK 与 ED 的交点 B' 共线，因此 B' 是 AF 与 ED 的交点，即 $B'=B$. 所以 B、K、L 共线. ……………………30 分



根据 A、B、P、C 四点共圆及 L、K、P、C 四点共圆，得

$$\angle ABC=\angle APC=\angle FLK=\angle FCB+\angle LBC,$$

又由 BK 平分 $\angle ABC$ 知，$\angle LBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，从而 $\angle ABC=2\angle FCB$.

……………………50 分

四、（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 k：对任意正整数 n，$2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$.

解：对正整数 m，设 $v_2(m)$ 表示正整数 m 的标准分解中素因子 2 的方幂，则熟知

$$v_2(m!) = m - S(m)\text{，} \quad ①$$

这里$S(m)$表示正整数m在二进制表示下的数码之和.

由于$2^{(k-1)n+1}$不整除$\frac{(kn)!}{n!}$等价于$v_2\left(\frac{(kn)!}{n!}\right) \le (k-1)n$，即$kn - v_2((kn)!) \ge n - v_2(n!)$，进而由①知，本题等价于求所有正整数$k$，使得$S(kn) \ge S(n)$对任意正整数$n$成立. ……………………10 分

我们证明，所有符合条件的k为$2^a (a = 0, 1, 2, \cdots)$.

一方面，由于$S(2^a n) = S(n)$对任意正整数n成立，故$k = 2^a$符合条件.

……………………20 分

另一方面，若k不是 2 的方幂，设$k = 2^a \cdot q$，$a \ge 0$，q是大于 1 的奇数.

下面构造一个正整数n，使得$S(kn) < S(n)$. 因为$S(kn) = S(2^a qn) = S(qn)$，因此问题等价于我们选取$q$的一个倍数$m$，使得$S(m) < S\left(\frac{m}{q}\right)$.

由$(2, q) = 1$，熟知存在正整数u，使得$2^u \equiv 1 \pmod q$.（事实上，由欧拉定理知，u可以取$\varphi(q)$.）

设奇数q的二进制表示为$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots + 2^{\alpha_t}, 0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_t, t \ge 2$.

取$m = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots + 2^{\alpha_{t-1}} + 2^{\alpha_t + tu}$，则$S(m) = t$，且

$$m = q + 2^{\alpha_t}(2^{tu} - 1) \equiv 0 \pmod q.$$

我们有

$$\frac{m}{q} = 1 + 2^{\alpha_t} \cdot \frac{2^{tu} - 1}{q} = 1 + 2^{\alpha_t} \cdot \frac{2^u - 1}{q}\left(1 + 2^u + \cdots + 2^{(t-1)u}\right)$$

$$= 1 + \sum_{l=0}^{t-1} \frac{2^u - 1}{q} \cdot 2^{lu + \alpha_t}. \quad ②$$

由于$0 < \frac{2^u - 1}{q} < 2^u$，故正整数$\frac{2^u - 1}{q}$的二进制表示中的最高次幂小于$u$，由此易知，对任意整数$i, j (0 \le i < j \le t-1)$，数$\frac{2^u - 1}{q} 2^{iu + \alpha_t}$与$\frac{2^u - 1}{q} 2^{ju + \alpha_t}$的二进制表示

中没有相同的项.

又因为$\alpha_l > 0$，故$\dfrac{2^u - 1}{q} 2^{ln+\alpha_l}\left(l = 0, 1, \cdots, t-1\right)$的二进制表示中均不包含 1，故由②可知

$$S\left(\frac{m}{q}\right) = 1 + S\left(\frac{2^u - 1}{q}\right) \cdot t > t = S(m),$$

因此上述选取的m满足要求.

综合上述的两个方面可知，所求的k为$2^a \left(a = 0, 1, 2, \cdots\right)$.　　………………50 分