北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(一)

2018.4

数学(文科)

本试卷共 4 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题:共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1)若集合 $A=\{x|-3<x<1\}$,$B=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$,则 $A\cap B=$

(A)$\{x|-3<x<-1\}$　　(B)$\{x|-3<x<2\}$

(C)$\{x|-1<x<1\}$　　(D)$\{x|1<x<2\}$

(2)复数 $z=\frac{i}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于

(A)第一象限　　(B)第二象限

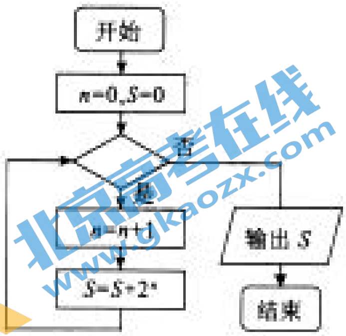
(C)第三象限　　(D)第四象限

(3)若 x,y 满足 $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0, \\ 2x+y-2\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $y-x$ 的最大值为

(A)-2　　(B)-1

(C)2　　(D)4

(4)执行如图所示的程序框图,如果输出的 S 值为 30,那么空白的判断框中应填入的条件是



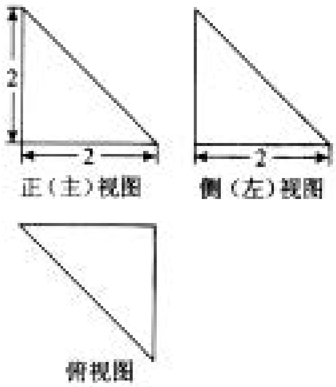
(A)$n\leqslant 2$

(B)$n\leqslant 3$

(C)$n\leqslant 4$

(D)$n\leqslant 5$

(5)某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥最长棱的棱长为



(A)2

(B)$2\sqrt{2}$

(C)$2\sqrt{3}$

(D) 4

(6)函数 $f(x)=\frac{4}{x}-2^x$ 的零点所在区间是

(A)$(0,\frac{1}{2})$　　(B)$(\frac{1}{2},1)$

(C)$(1,\frac{3}{2})$　　(D)$(\frac{3}{2},2)$

(7)已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，则"$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$"是"向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 同向"的

(A)充分而不必要条件

(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分也不必要条件

(8)为弘扬中华传统文化，某校组织高一年级学生到古都西安游学．在某景区，由于时间关系，每个班只能在甲、乙、丙三个景点中选择一个游览．高一1班的27名同学决定投票来选定游览的景点，约定每人只能选择一个景点，得票数高于其它景点的入选．据了解，在甲、乙两个景点中有18人会选择甲，在乙、丙两个景点中有18人会选择乙．那么关于这轮投票结果，下列说法正确的是

①该班选择去甲景点游览；

②乙景点的得票数可能会超过9；

③丙景点的得票数不会比甲景点高；

④三个景点的得票数可能会相等．

(A)①②　　　　(B)①③

(C)②④　　　　(D)③④

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题：共6小题，每小题5分，共30分．

(9)命题"$\forall x\in\mathbf{R},e^x>0$"的否定是____．

(10)已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点坐标为 $(\frac{1}{4},0)$，则 $p=$____．

(11)在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 为始边的角 θ 的终边经过点 $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则 $\sin\theta=$____，

$\tan 2\theta=$____．

(12)已知圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的点到直线 $y=kx-2$ 的距离的最小值为1，则实数 $k=$____．

(13)已知实数 x,y 满足 $2x+y=1$，则 xy 的最大值为____．

(14)定义：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的差为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的极差，记作 $d(a,b)$．

①若 $f(x)=x^2-2x+2$，则 $d(1,2)=$________；

②若 $f(x)=x+\frac{m}{x}$，且 $d(1,2)\neq|f(2)-f(1)|$，则实数 m 的取值范围是________．

三、解答题：共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

(15)（本小题 13 分）

已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_2=-6$，$S_5=S_6$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_2$，$b_2=S_3$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

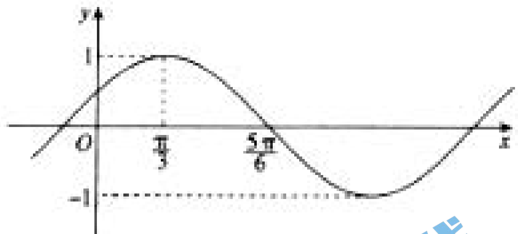
(16)（本小题 13 分）

函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

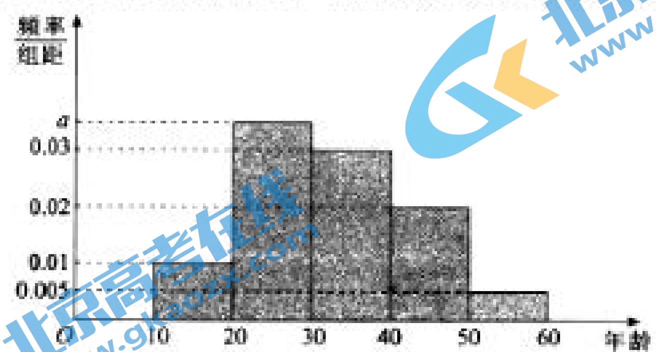
（Ⅱ）将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象.

令 $F(x)=f(x)+g(x)$，求函数 $F(x)$ 的单调递增区间.



(17)（本小题 13 分）

某网站从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取 10000 名进行调查，将受访用户按年龄分成 5 组：[10,20)，[20,30)，…，[50,60]，并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人，估计其年龄低于 40 岁的概率；

（Ⅲ）估计春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄.

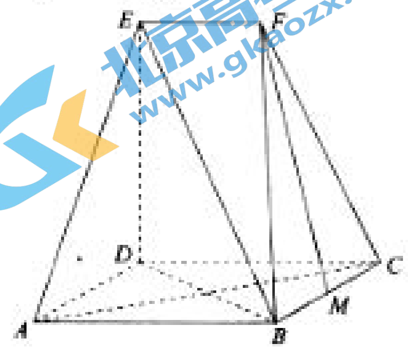
(18)(本小题14分)

如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle DAB=60^\circ$，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$ED=AD=2EF=2$，$EF/\!/AB$，M 为 BC 中点.

(Ⅰ)求证：$FM/\!/$ 平面 BDE；

(Ⅱ)求证：$AC\perp BE$；

(Ⅲ)若 G 为线段 BE 上的点，当三棱锥 $G-BCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，求 $\frac{BG}{BE}$ 的值.



(19)(本小题14分)

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，长轴长为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)点 M 是以长轴为直径的圆 O 上一点，圆 O 在点 M 处的切线交直线 $x=3$ 于点 N.

求证：过点 M 且垂直于直线 ON 的直线 l 过椭圆 C 的右焦点.

(20)(本小题13分)

已知函数 $f(x)=x\sin x+a\cos x+x$，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(Ⅱ)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值；

(Ⅲ)当 $a>2$ 时，若方程 $f(x)-3=0$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上有唯一解，求 a 的取值范围.

北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(一)

2018.4

数学(文科)参考答案及评分标准

一、选择题:共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

(1)A　　(2)B　　(3)C　　(4)B

(5)C　　(6)C　　(7)B　　(8)D

二、填空题:共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

(9) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} \leqslant 0$　　(10) $\frac{1}{2}$

(11) $\frac{4}{5}$　$-\frac{24}{7}$　　(12) $-\frac{4}{3}$ 或 0

(13) $\frac{1}{8}$　　(14) 1　(1,4)

三、解答题:共 6 小题,共 80 分.

(15)(共 13 分)

解:(Ⅰ)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $S_3 = S_6$,所以 $a_5 = a_2 + 3d = 0$.

因为 $a_2 = -6$,所以 $d = 2$,$a_1 = -10$.

所以 $a_n = 2n - 12$,$n \in \mathbf{N}^*$. ………………………………………… 6 分

(Ⅱ)设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.

由(Ⅰ)可知,$b_1 = -8$,$b_2 = -24$,所以 $q = 3$.

所以,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{(-8)(1-3^n)}{1-3} = 4(1-3^n)$,$n \in \mathbf{N}^*$. ………… 13 分

(16)(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $\frac{2\pi}{\omega} = 4(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = 2\pi$,

所以 $\omega = 1$.

又因为 $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = 1$,

所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

即 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$.

因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)$ 的解析式是 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$. ………………………………… 6 分

（Ⅱ）由已知 $g(x)=\sin[(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，

所以 $f(x)+g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\cos x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$$

$$=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3}).$$

函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $F(x)$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$. ………………… 13 分

(17)（共 13 分）

解：（Ⅰ）根据频率分布直方图可知，$10\times(a+0.005+0.01+0.02+0.03)=1$，

解得 $a=0.035$. ………………………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）根据题意，样本中年龄低于 40 岁的频率为

$10\times(0.01+0.035+0.03)=0.75$，

所以从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人，

估计其年龄低于 40 岁的概率为 0.75. ………………………………………… 10 分

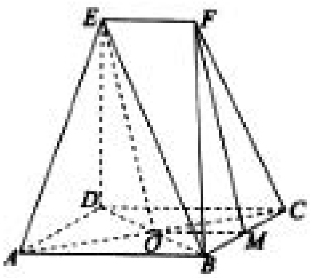
（Ⅲ）根据题意，春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄估计为

$15\times0.1+25\times0.35+35\times0.3+45\times0.2+55\times0.05=32.5$（岁）. …… 13 分

(18)（共 14 分）

解：（Ⅰ）设 $AC\cap BD=O$，连接 EO，MO.

因为 M，O 分别是 BC，BD 的中点，



因为 $EF/\!/AB$，且 $EF=\frac{1}{2}AB$，

因为 $OM/\!/AB$，且 $OM=\frac{1}{2}AB$，

所以 $EF/\!/OM$，且 $EF=OM$.

所以四边形 $EOMF$ 为平行四边形.

所以 $FM/\!/EO$.

又因为 $EO\subset$ 平面 BDE，$FM\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $FM/\!/$ 平面 BDE. ……………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）因为 $ABCD$ 为菱形，

所以 $AC\perp BD$.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $ED\perp AC$.

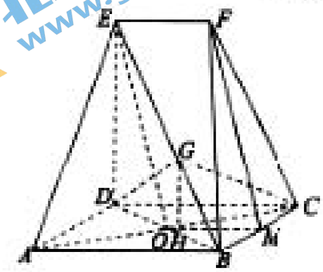
因为 $BD\cap ED=D$，

所以 $AC\perp$ 平面 BDE.

又因为 $BE\subset$ 平面 BDE，

所以 $AC\perp BE$. ………………………………………………………………………… 10 分

（Ⅲ）过 G 作 ED 的平行线交 BD 于 H.



由已知 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $GH\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 GH 为三棱锥 $G-BCD$ 的高.

因为三棱锥 $G-BCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，

所以三棱锥 $G-BCD$ 的体积

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot BD\cdot BC\cdot\sin 60^\circ\cdot GH=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

所以 $GH=\frac{2}{3}$.

所以 $\frac{GH}{ED}=\frac{BG}{BE}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$.

所以 $\frac{BG}{BE}=\frac{1}{3}$. ………………………………………………………………………… 14 分

(19)(共 14 分)

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}2a=2\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 解得 $c=1$.

所以 $b^2=a^2-c^2=2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）由题意知，圆 O 的方程为 $x^2+y^2=3$.

设 $N(3,t)$，$M(x_0,y_0)$，$x_0^2+y_0^2=3$.

由 $|ON|^2=3+|MN|^2$，

得 $3^2+t^2=3+(x_0-3)^2+(y_0-t)^2$，

即 $9+t^2=3+x_0^2-6x_0+9+y_0^2-2ty_0+t^2$，

即 $3+x_0^2-6x_0+y_0^2-2ty_0=0$.

因为 $x_0^2+y_0^2=3$，

所以 $3x_0+y_0t-3=0$.

当 $t=0$ 时，$x_0=1$，直线 l 的方程为 $x=1$，直线 l 过椭圆 C 的右焦点 $F(1,0)$.

当 $t\neq 0$ 时，直线 MN 的方程为 $y-y_0=-\frac{3}{t}(x-x_0)$，

即 $ty-ty_0=-3x+3x_0$，即 $ty=-3(x-1)$，直线 l 过椭圆 C 的右焦点 $F(1,0)$.

综上所述，直线 l 过椭圆 C 的右焦点 $F(1,0)$. ………………………………… 14 分

(20)(共 13 分)

解：(Ⅰ)当 $a=-1$ 时，$f(x)=x\sin x-\cos x+x$，

所以 $f'(x)=2\sin x+x\cos x+1$，$f'(0)=1$.

又因为 $f(0)=-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x-1$. …………… 4 分

(Ⅱ)当 $a=2$ 时，$f(x)=x\sin x+2\cos x+x$，

所以 $f'(x)=-\sin x+x\cos x+1$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$1-\sin x>0$，$x\cos x>0$，

所以 $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

因此 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{2})=\pi$，最小值为 $f(0)=2$. … 8 分

(Ⅲ)当 $a>2$ 时，$f'(x)=(1-a)\sin x+x\cos x+1$.

设 $h(x)=(1-a)\sin x+x\cos x+1$，

$h'(x)=(2-a)\cos x-x\sin x$，

因为 $a>2$，且 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因为 $h(0)=1>0$，$h(\frac{\pi}{2})=1-a+1=2-a<0$，

所以存在唯一的 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使 $h(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,x_0]$ 上单调递增，在区间 $[x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因为 $f(0)=a$，$f(\frac{\pi}{2})=\pi$，

又因为方程 $f(x)-3=0$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上有唯一一解，

所以 $2<a\leqslant 3$. ……………………………………………………………… 13 分