2023 北京丰台高二（上）期中

数　　学（B 卷）

练习　　时间：120 分钟

第 I 卷（选择题共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）直线 $y=\sqrt{3}x$ 的倾斜角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

（2）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(4,x,y)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $x+y=$

（A）-4　　（B）-2　　（C）4　　（D）2

（3）已知点 B 是点 $A(2,-3,4)$ 在坐标平面 Oxy 内的射影，则点 B 的坐标为

（A）$(2,-3,0)$　　（B）$(2,0,4)$

（C）$(0,-3,4)$　　（D）$(2,3,4)$

（4）已知直线 l 经过点 $A(-3,2)$，且与直线 $x+2y-2=0$ 垂直，则直线 l 的方程为

（A）$x+2y-1=0$　　（B）$x-2y+7=0$

（C）$2x+y+4=0$　　（D）$2x-y+8=0$

（5）圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 截 x 轴所得弦的长度为

（A）2　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）4

（6）若直线 $2x-y+m=0$ 和直线 $3x-y+3=0$ 的交点在第二象限，则 m 的取值范围为

（A）$(-\infty,3)$　　（B）$(2,+\infty)$

（C）$(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$　　（D）$(2,3)$

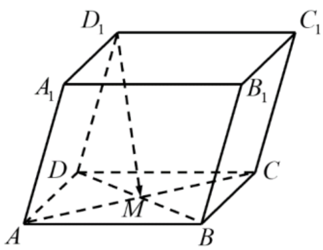
（7）如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $\overrightarrow{D_1M}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，则有序实数组 $(x,y,z)=$

（A）$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

（B）$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

（C）$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)$

（D）$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)$



（8）已知直线 l_1：$ax-3y+12=0$，l_2：$x+(a-4)y+4=0$，若 $l_1\parallel l_2$，则实数 $a=$

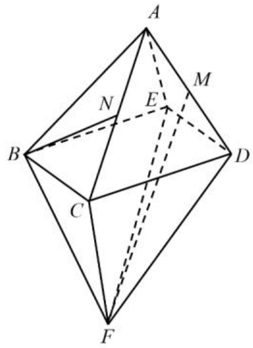
（A）1　　　　（B）3　　　　（C）1或0　　　　（D）1或3

（9）已知平面 $\alpha=\{P\mid \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\}$，其中点 $A(1,1,2)$，向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，则下列各点中在平面 α 内的是

（A）$(2,-1,-1)$　　　　（B）$(0,3,1)$

（C）$(-2,4,3)$　　　　（D）$(5,-1,-2)$

（10）正多面体也称柏拉图立体，被誉为最有规律的立体结构，是所有面都只由一种正多边形构成的多面体（各面都是全等的正多边形）. 数学家已经证明世界上只存在五种柏拉图立体，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体. 如图，已知一个正八面体 $ABCDEF$ 的棱长为2，M，N 分别为棱 AD，AC 的中点，则直线 BN 和 FM 夹角的余弦值为



（A）$\dfrac{5}{6}$　　　　（B）$\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

（C）$\dfrac{\sqrt{21}}{6}$　　　　（D）$\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

第Ⅱ卷（非选择题共 110 分）

二、填空题:共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

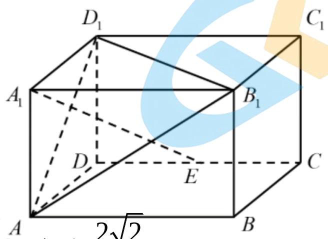
（11）以点 $(2,-1)$ 为圆心且半径为2的圆的标准方程是______.

（12）已知点 $A(1,0,2)$，$B(1,2,5)$，$C(-2,3,6)$，则 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$______.

（13）已知直线 l 经过点 $A(1,4)$，且斜率为2，则直线 l 的一个方向向量为______.

（14）已知点 P 为圆 $x^2+y^2=1$ 上一点，记 d 为点 P 到直线 $x-my-2=0$ 的距离. 当 m 变化时，d 的最大值为______.

（15）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AD=DD_1=1$，点 E 是棱 CD 上的动点，给出下列 4 个结论：



① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{B_1D_1}$；

② $AD_1\perp A_1E$；

③若 E 为 CD 中点，则点 B_1 到直线 A_1E 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$；

④存在点 E，使得 $A_1E\perp$ 平面 AB_1D_1.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题:共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 14 分）

在△ABC 中，$A(-3,0)$，$B(1,4)$，$C(3,-3)$.

（Ⅰ）求边 AB 所在直线的方程；

（Ⅱ）求边 AB 上的中线所在直线的方程.

（17）（本小题 14 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,4)$，$\boldsymbol{c}=(5,1,x)$.

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求实数 x 的值；

（Ⅱ）求 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

（Ⅲ）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不能构成空间向量的一个基底，求实数 x 的值.

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PD\perp AD$，$PD=2DC=4$，E 是棱 PA 的中点.

（I）求证：$PC\parallel$ 平面 BDE；

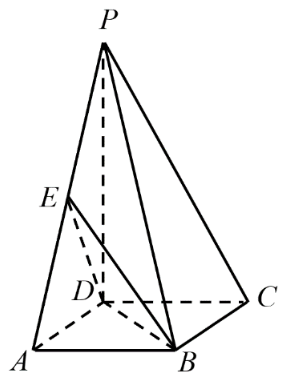
（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，

求平面 BDE 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

条件①：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

条件②：$PD\perp DC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



（19）（本小题 14 分）

已知圆 M_1：$x^2+2x+y^2-8=0$.

（I）求圆 M_1 的圆心坐标以及半径；

（Ⅱ）求经过点 $P_0(2,1)$ 的圆 M_1 的切线方程；

（Ⅲ）若圆 M_1 与圆 M_2：$(x-2)^2+(y-4)^2=m\ (m>0)$ 有公共点，求实数 m 的取值范围.

（20）（本小题 14 分）

赵州桥，又名安济桥，位于河北省石家庄市赵县的洨河上，距今已有1400 多年的历史，是保存最完整的古代单孔敞肩石拱桥，其高超的技术水平和不朽的艺术价值，彰显了中国劳动人民的智慧和力量．2023 年以来，中国文旅市场迎来强劲复苏，某地一旅游景点为吸引游客，参照赵州桥的样式在景区兴建圆拱桥，该圆拱桥的圆拱跨度为16m，拱高为4m，在该圆拱桥的示意图中建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

图 1

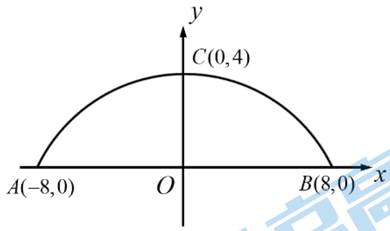


图 2

（I）求这座圆拱桥的拱圆的方程；

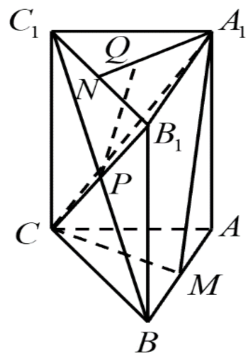
（Ⅱ）若该景区游船宽 10m，水面以上高 3m，试判断该景区游船能否从桥下通过，并说明理由.

$(\sqrt{3}\approx 1.732)$

（21）（本小题 15 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=2$，$AA_1=3$.

M，N 分别为棱 AB，B_1C_1 的中点，BC_1 与 B_1C 交于点 P.



（I）求直线 AA_1 与平面 A_1CM 所成角的正弦值；

（Ⅱ）求直线 BC_1 到平面 A_1CM 的距离；

（III）在线段 A_1N 上是否存在点 Q，使得 $PQ\ //$ 平面 A_1CM？

若存在，求 $\dfrac{A_1Q}{A_1N}$ 的值；若不存在，请说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

第Ⅰ卷（选择题 共 40 分）

一、 选择题（每小题 4 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	D	B	D	C	A	B	D

第Ⅱ卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

（11） $(x-2)^2+(y+1)^2=4$； （12） $(3,-1,-1)$；

（13） $(1,2)$ （答案不唯一）； （14） 3；

（15）②④.

（注：15 题给出的结论中，有多个符合题目要求．全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分．）

三．解答题（共 85 分）

（16）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $A(-3,0)$， $B(1,4)$，

所以边 AB 所在直线的斜率 $k_{AB}=\dfrac{4-0}{1-(-3)}=1$．

又因为该直线过点 $A(-3,0)$，

所以边 AB 所在直线的方程为： $y=x+3$，

即 $x-y+3=0$．　　　　……………6 分

（Ⅱ）设边 AB 上的中点为 M，则直线 MC 即为边 AB 上的中线．

因为 $A(-3,0)$， $B(1,4)$，

所以 $M(-1,2)$，又因为 $C(3,-3)$

所以直线 MC 的斜率 $k_{MC}=\dfrac{-3-2}{3-(-1)}=-\dfrac{5}{4}$．

又因为该直线过点 $M(-1,2)$，

所以直线 MC 的方程为： $y-2=-\dfrac{5}{4}(x+1)$，

即 $5x+4y-3=0$．　　　　…………14 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，即 $5+3+2x=0$， $x=-4$．　…………4 分

（Ⅱ）因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,3,2)$， $\boldsymbol{b}=(-2,1,4)$，

所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,3,2)-(-2,1,4)=(4,5,0)$，

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$ ……………9 分

（III）因为 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{c}$ 不能作为空间向量的一组基底

所以向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 共面，故存在唯一的数对 (m,n)，

使得 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，

即 $(5,1,x)=m(1,3,2)+n(-2,1,4)$，

$(5,1,x)=(m-2n,3m+n,2m+4n)$，解得 $x=-6$． ……………14 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）证明：在底面 $ABCD$ 中，连接 AC 交 BD 于点 F，可得 F 为 AC 中点，连接 EF．

因为 EF 是 ΔPAC 的中位线，

所以 $EF//PC$，

因为 $EF\subset$ 平面 BDE，

又因为 $PC\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $PC//$ 平面 BDE． ……………4 分

选①：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$．

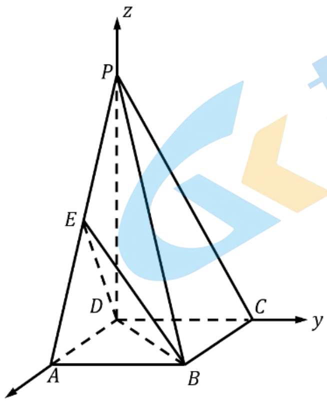
（Ⅱ）因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$PD\subset$ 平面 PAD， $PD\perp AD$

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD,PD\perp DC$．

又底面 $ABCD$ 是正方形，所以 PD,AD,DC 两两相互垂直．

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$



则 $D(0,0,0)$， $B(2,2,0)$， $E(1,0,2)$．

所以 $\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$， $\overrightarrow{DE}=(1,0,2)$．

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y=0,\\ x+2z=0.\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=-2$， $z=-1$，于是 $\boldsymbol{n}=(2,-2,-1)$．

又因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,3)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

设平面 BDE 与平面 $ABCD$ 夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DP}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}.$$

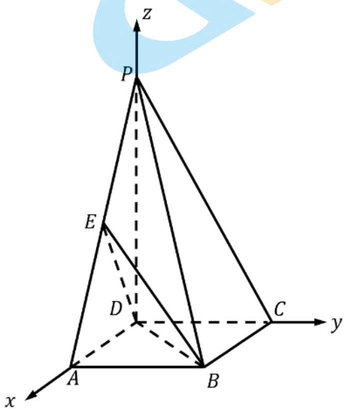
所以平面 BDE 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$．　·········14 分

选②：$PD\perp DC$．

（Ⅱ）因为 $PD\perp DC$， $PD\perp AD$，又底面 $ABCD$ 是正方形

所以 PD, AD, DC 两两相互垂直.

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，



则 $D(0,0,0)$， $B(2,2,0)$， $E(1,0,2)$．

所以 $\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$， $\overrightarrow{DE}=(1,0,2)$．

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y=0,\\ x+2z=0.\end{cases}$

令 $x=2$， 则 $y=-2$， $z=-1$． 于是 $\boldsymbol{n}=(2,-2,-1)$．

又因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,3)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

设平面 BDE 与平面 $ABCD$ 夹角为 θ， 则

$$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DP}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}.$$

所以平面 BDE 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$．　·········14 分

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为圆 M_1： $x^2+2x+y^2-8=0$，整理得 $(x+1)^2+y^2=9$

所以圆心 M_1 的坐标为 $(-1,0)$，半径 $r=3$．　················4 分

（Ⅱ）①当切线 l 斜率不存在时，切线 l 的方程为 $x=2$， 符合题意；

②当切线 l 斜率存在时，设 l： $y-1=k(x-2)$，

即 $kx-y-2k+1=0$．

设圆心 M_1 $(-1,0)$ 到切线 l 的距离为 d， 则 $d=\frac{|-k+0-2k+1|}{\sqrt{k^2+1^2}}=3$．

整理可得：$|-3k+1|=3\sqrt{k^2+1^2}$，

解得：$k=-\frac{4}{3}$

所以切线 l 的方程为 $-\frac{4}{3}x-y+\frac{11}{3}=0$，即 $4x+3y-11=0$.

综合①②，切线 l 的方程为 $x=2$ 或 $4x+3y-11=0$. ……10 分

（III）圆 M_1 与圆 M_2 的圆心距为 $|M_1M_2|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

设圆 M_1 的半径为 r_1，圆 M_2 的半径为 r_2，

若圆 M_1 与圆 M_2：$(x-2)^2+(y-4)^2=m$ 有公共点，

则 $|r_2-r_1|\leqslant|M_1M_2|\leqslant|r_1+r_2|$，即 $\begin{cases}|r_2-3|\leqslant 5\\ 5\leqslant|3+r_2|\end{cases}$，

解得 $2\leqslant r_2\leqslant 8$，

故 $m=r_2^{\ 2}\in[4,64]$. ……………14 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）设这座圆拱桥的拱圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

因为该拱圆过 $A(-8,0)$，$B(8,0)$，$C(0,4)$，

所以 $\begin{cases}64-8D+F=0\\ 64+8D+F=0\\ 16+4E+F=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=0\\ E=12\\ F=-64\end{cases}$.

所以拱圆的一般方程为 $x^2+y^2+12y-64=0$，

即 $x^2+(y+6)^2=100$. ……………6 分

（Ⅱ）当 $x=5$ 时，$5^2+(y+6)^2=100$，

得 $y=5\sqrt{3}-6\approx 2.66\text{m}<3\text{m}$

所以该景区游船可以从桥下通过. ……………14 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

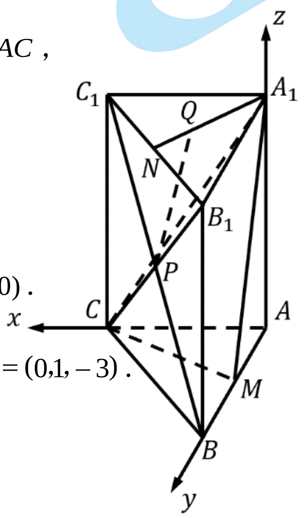
$AA_1\perp$ 底面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，

又因为 $\angle BAC=90°$，

所以 AA_1，AB，AC 两两相互垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,3)$，$C(2,0,0)$，$M(0,1,0)$.



所以 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,0,-3)$，$\overrightarrow{A_1M}=(0,1,-3)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x-3z=0, \\ y-3z=0. \end{cases}$

令 $z=2$，则 $x=3$， $y=6$．于是 $\boldsymbol{n}=(3,6,2)$．

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AA_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{7}$．

设直线 AA_1 与平面 A_1CM 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{2}{7}$，

故直线 AA_1 与平面 A_1CM 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{7}$．　　………6 分

（Ⅱ）在侧面 AA_1C_1C 中，连接 AC_1 交 A_1C 于点 G，可知 G 为 AC_1 中点，连接 GM．

因为 GM 是 ΔAC_1B 的中位线，

所以 BC_1 // GM，

又因为 $GM\subset$ 平面 A_1CM，

$BC_1\not\subset$ 平面 A_1CM，

所以 BC_1 // 平面 A_1CM．

所以直线 BC_1 到平面 A_1CM 的距离等于点 B 到平面 A_1CM 的距离．

又因为 $B(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(0,-2,3)$，

设点 B 到平面 A_1CM 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6}{7}$，　……10 分

所以直线 BC_1 到平面 A_1CM 的距离为 $\dfrac{6}{7}$．

（Ⅲ）线段 A_1N 上存在点 Q，点 Q 为 A_1N 上靠近点 N 的三等分点，满足 PQ // 平面 A_1CM，证明如下：

设 $\overrightarrow{A_1Q}=\lambda\overrightarrow{A_1N}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

因为 $A_1(0,0,3)$， $N=(1,1,3)$

所以 $\overrightarrow{A_1N}=(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1Q}=(\lambda,\ \lambda,0)$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{A_1Q}=(-1,-1,\dfrac{3}{2})+(\lambda,\ \lambda,0)=(\lambda-1,\ \lambda-1,\dfrac{3}{2})$．

由（Ⅰ）知平面 A_1CM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,6,2)$，

因为 PQ // 平面 A_1CM，

所以$\overrightarrow{PQ}\cdot \boldsymbol{n}=0$，即$3\times(\lambda-1)+6\times(\lambda-1)+2\times\frac{3}{2}=0$，

解得：$\lambda=\frac{2}{3}$，

所以线段A_1N上存在点Q，点Q为A_1N上靠近点N的三等分点，满足$PQ/\!/$平面A_1CM． ················15分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！