北京市八一学校 2023—2024 学年度第一学期 12 月月考

高 一 数 学 试 卷

2023.12

本试卷共 4 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 设全集为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\complement_U A=\{2,3,5\}$，$B=\{2,5,6\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$(　　)

（A）$\{1,4\}$　　（B）$\{2,5\}$　　（C）$\{6\}$　　（D）$\{1,3,4,6\}$

2. 下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是(　　)

（A）$f(x)=e^x-e^{-x}$　　（B）$f(x)=2^{|x|}$　　（C）$f(x)=\log_2 x$　　（D）$f(x)=-x^3$

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(-2)=$(　　)

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

4. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=(\frac{2}{3})^{0.3}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则 a,b,c 的大小关系是(　　)

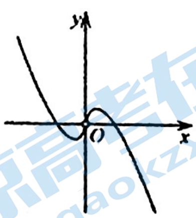
（A）$b<a<c$　　（B）$c<b<a$　　（C）$c<a<b$　　（D）$a<b<c$

5. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2^x}-\frac{5}{x}$，下列区间中含有 $f(x)$ 零点的是（　　）

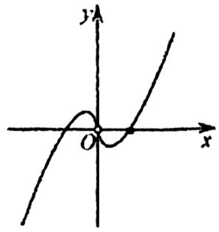
（A）$(-1,0)$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(2,3)$

6. 函数 $f(x)=x\log_2|x|$ 的图象大致为(　　)

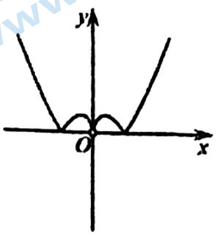
（A）



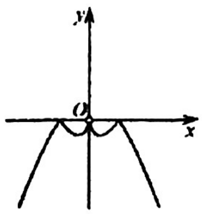
（B）



（C）



（D）



7.下列说法错误的是（　　）

（A）命题“$\exists x_0\in R$,使得$x_0^2-2x_0+2\geq 0$”是真命题

（B）若$a>1$，则“$0<b<a$”是“$\log_a b<1$”的充要条件

（C）当$a>1$时，方程$\left|x^2-2x\right|=a$恰有四个实根

（D）命题“$\forall x\in[1,3],x^2-4x+3\leq 0$”的否定为“$\exists x_0\in[1,3],x_0{}^2-4x_0+3>0$”

8. 在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度v(单位：km/s)与燃料的质量M(单位：kg)，火箭(除燃料外)的质量m(单位：kg)的函数关系是$v=2000\ln(1+\frac{M}{m})$. 当燃料质量与火箭质量的比值为t_0时，火箭的最大速度可达到v_0km/s.若要使火箭的最大速度达到$2v_0km/s$，则燃料质量与火箭质量的比值应为(　　)

（A）$2t_0^2$　　（B）$t_0^2+2t_0$　　（C）$2t_0$　　（D）$t_0^2+t_0$

9. 已知A,B是函数$y=2^x$的图像上的相异两点．若点A,B到直线$y=\frac{1}{4}$的距离相等，则点A,B的横坐标之和的取值范围是(　　)

（A）$(-2,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-2)$　　（C）$(-4,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-4)$

10. 对于函数$y=f(x)$，若存在x_0，使$f(x_0)+f(-x_0)=0$，则称点$(x_0,f(x_0))$是曲线$f(x)$的“优美点”.已知$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x<0\\kx+2,x\geqslant 0\end{cases}$，若曲线$f(x)$存在“优美点”，则实数$k$的取值范围为(　　)

（A）$[2-2\sqrt{2},0)$　　（B）$(-\infty,2-2\sqrt{2}]$　　（C）$(-\infty,2+2\sqrt{2}]$　　（D）$(0,2+2\sqrt{2}]$

二、填空题:本大题共5小题,每小题4分,共20分.

11. 关于x的不等式$\frac{x+1}{x-2}<0$的解集为__________.

12. 已知幂函数$f(x)=x^{\alpha}$（α是常数）的图象经过点$(2,\sqrt{2})$，那么$f(4)=$__________.

13. 已知函数$f(x)=ax^2+(b-1)x$是偶函数，且定义域是$[a-1,2a]$，则$a+b=$________.

14. 已知函数$f(x)=x^2-4x+a(2^{x-2}+2^{-x+2})$有唯一零点，则实数$a$的值是________.

15. 设函数$f(x)=\begin{cases}(x-a+1)(x+1), & x<1,\\ \lg x-a, & x\geq 1.\end{cases}$

①当$a=0$时，$f(f(1))=$__________；

②若$f(x)$恰有2个零点，则a的取值范围是__________.

三、解答题:本大题共5小题，共60分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. （本小题满分10分）

计算:（I）$(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}-(-9.6)^0-(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}+(1.5)^{-2}$　　（II）$\log_{\frac{1}{9}}3+2\lg 4+\lg\frac{5}{8}+e^{3\ln 2}$

17. （本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\frac{2}{x}-x^m$，且 $f(4)=-\frac{7}{2}$.

（I）求 m 的值;

（II）判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明.

（III）求不等式 $f\left(2^{x+2}\right)>f\left(4^x+3\right)$ 的解集.

18. （本小题满分14分）

已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，其图象关于原点对称.当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x$.

（I）求函数 $f(x)$ 的解析式.

（II）求不等式 $f(x)<1$ 的解集 A.

（III）设函数 $g(x)=\sqrt{-x^2+(a-1)x+a}$（其中 $a>-1$）的定义域为集合 B,若 $A\cap B=B$,

求实数 a 的取值范围.

19. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$, $g(x)=x^2-ax+6(a\in R)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的定义域.

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

（Ⅲ）对 $\forall x_1\in[\sqrt{3},+\infty), x_2\in[1,2]$, 不等式 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

20. （本小题满分 10 分）

集合 P 由有限个实数组成，定义集合P的离距 $d(P)$ 如下：实数轴上，集合 P 中的每个实数 a 对应一个点 A，实数x对应的点 X 与所有这些点A的距离的算术平均数记为 $f(x)$，称函数 $f(x), x\in R$ 的最小值为集合 P 的离距，记为 $d(P)$.例如，集合 $\{\pi\}$ 的离距是 0，集合 $\{-2,2\}$ 的离距是 2。

（I）分别求出集合 $P_1=\{1,2\}$ 、$P_2=\{-1,0,2\}$ 的离距;

（II）求数集 $P=\{a,b,c,d\}$ 的离距;

（III）已知非空数集 A,B,C 满足 $A\cup B=C, A\cap B=\varnothing$，试写出一个关于 $d(A),d(B),d(C)$ 的大小关系的等式或不等式，并给出证明.

12 月月考参考答案

一、选择题（每小题 4 分）

1~5ADCDC　6~10BCBDB

二、填空题（每小题 4 分，其中 11 题不写“解集”不给分；15 题每个空 2 分）

11. $(-1,2)$；　12. 2；　13. $\frac{4}{3}$；　14. 2；　15.（1）1；（2）$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

三、解答题

16.（本小题满分 10 分，每题 5 分）

$$(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}-(-9.6)^0-(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}+(1.5)^{-2}$$
$$=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$
$$=\frac{3}{2}-1-\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}3+2\lg 4+\lg\frac{5}{8}+e^{3\ln 2}$$
$$=\log_{3^{-2}}3+\lg 16+\lg\frac{5}{8}+8$$
$$=-\frac{1}{2}+1+8=9-\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$$

17.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{2}{x}-x^m$，且 $f(4)=-\frac{7}{2}$.

（I）求 m 的值；

（II）判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明.

（III）解不等式 $f\left(2^{x+2}\right)>f\left(4^x+3\right)$

解：（I）由$f(4)=\frac{1}{2}-4^m=-\frac{7}{2}$得$4^m=4$，则$m=1$.　…………………2 分

（II）$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增.证明如下：

任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{x_1}-x_1-\frac{2}{x_2}+x_2$$
$$=\frac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2}+(x_2-x_1)$$
$$=(x_2-x_1)\left(1+\frac{2}{x_1x_2}\right)$$

又$\because x_2-x_1>0,1+\frac{2}{x_1x_2}>0$,则

$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$,　…..6 分

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

（III）由（II）可得，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.而$2^{x+2}>0,4^x+3>0$,可得

$2^{x+2}<4^x+3$. 令$t=2^x\left(t>0\right)$，可得$4t<t^2+3$.

解得：$0<t<1或t>3$.

所以$x<0或x>\log_2 3$.

不等式的解集为$(-\infty,0)\cup(\log_2 3,+\infty)$. ………………..12 分

18. （本小题满分 14 分）

解：(I) 当$x=0$时，$f\left(x\right)=0$.

当$x<0时,-x>0,$ 则$f\left(-x\right)=\ln\left(-x\right)$，又$f\left(x\right)$为奇函数，所以$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

得$f\left(-x\right)=\ln\left(-x\right)=-f\left(x\right)$,即$f\left(x\right)=-\ln\left(-x\right)$，综上

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x, x>0\\ 0, x=0\\ -\ln\left(-x\right), x<0\end{cases}$$ ………………..4 分

（II）（1）当$x>0$时，$\ln x<1$，解得$0<x<e$；

（2）当$x<0$时，$-\ln\left(-x\right)<1$，解得$x<-\frac{1}{e}$.

（3）当$x=0$时，不等式成立.

综上，不等式的解集为$A=\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)\cup\left[0,e\right)$. ………………..10 分

（III）先求函数$g\left(x\right)=\sqrt{-x^2+\left(a-1\right)x+a}$的定义域，

由$-x^2+\left(a-1\right)x+a\geq 0$可得，$\left(x-a\right)\left(x+1\right)\leq 0$.

又因为$a>-1$，所以$g\left(x\right)$的定义域$B=\left[-1,a\right]$.

又因为$A\cap B=B$，所以$B\subseteq A$.a的取值范围是$\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$. ………………..14 分

19. （本小题满分 14 分）

解：(I) $\begin{cases}x+1>0\\ x-1>0\end{cases}$，则$x>1$，$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$. ………………..2 分

（II）因为$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，不关于原点对称，所以函数$f\left(x\right)$为非奇非偶函数.

………………..4 分

（III）由“对$\forall x_1\in[\sqrt{3},+\infty),x_2\in[-2,4]$,不等式$f(x_1)\leqslant g(x_2)$恒成立”可得

$f(x)_{\max} \le g(x)_{\min}$.

先求 $f(x)$ 的最大值.当 $x \ge \sqrt{3}$ 时， $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$

由 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$ 上单调递减， $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{3}\right)=-1$.

原题意转化为：对 $\forall x \in [1,2], x^2-ax+7 \ge 0$ …………………7 分

法一：（参变分离）$\forall x \in [1,2], a \le x+\dfrac{7}{x}$

令 $h(x)=x+\dfrac{7}{x}$，由 $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减得，$h(x)_{\min}=h(2)=2+\dfrac{7}{2}=\dfrac{11}{2}$.

实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{11}{2}\right]$. …………………14 分

法二：（分类讨论）

（1）当 $\dfrac{a}{2} \ge 2$，即 $a \ge 4$ 时，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，

$g(x)_{\min}=g(2)=10-2a \ge -1$，解得 $a \le \dfrac{11}{2}$，则 $4 \le a \le \dfrac{11}{2}$ ；

（2）当 $\dfrac{a}{2} \le 1$，即 $a \le 2$ 时，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

$g(x)_{\min}=g(1)=7-a \ge -1$，解得 $a \le 8$，则 $a \le 2$ ；

（3）当 $1<\dfrac{a}{2}<2$，即 $2<a<4$ 时，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 先减后增，

$g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{a}{2}\right)=6-\dfrac{a^2}{4} \ge -1$，解得 $-2\sqrt{7} \le a \le 2\sqrt{7}$，则 $2<a<4$；

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{11}{2}\right]$. …………………14 分

20. （本小题满分 10 分）

解：

首先，单元素数集的离距都是 0；两元素数集的离距等于大数减去的差的一半；三元素数集的离距等于最大数与最小数的差的三分之一。理由及更一般的情况如下。

一般地，记 $P=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}, a_1<a_2<a_3<\dots<a_n$，

则 $f(x)=\frac{1}{n}(|x-a_1|+|x-a_2|+\dots+|x-a_n|)$ 的最小值就是离距 $d(P)$。

当 n=1 时，$d(P)=f(a_1)=0$;

当 n=2 时，$|x-a_1|+|x-a_2| \ge |(x-a_1)-(x-a_2)|=a_2-a_1$，当仅当 $a_1 \le x \le a_2$ 时取等号，故 $d(P)=f(a_1)=\frac{a_2-a_1}{2}$;

当n=3 时，$|x-a_1|+|x-a_3|\geq|(x-a_1)-(x-a_3)|=a_3-a_1$，当仅当$a_1\leq x\leq a_3$时取等号，故当$x=a_2$时$|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$最小（等于$a_3-a_1$），故$d(P)=f(a_2)=\frac{a_3-a_1}{3}$;

更一般地，

由$|x-a_i|+|x-a_{n+1-i}|\geq|(x-a_i)-(x-a_{n+1-i})|=|a_{n+1-i}-a_i|$，当$a_{n+1-i}\leq x\leq a_i$或者$a_i\leq x\leq a_{n+1-i}$时取等号，$i=1,2,3,\ldots,n$

知 $2(|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|)=(|x-a_1|+|x-a_n|)+(|x-a_2|+|x-a_{n-1}|)+\ldots+(|x-a_n|+|x-a_1|)\geq|a_n-a_1|+|a_{n-1}-a_2|+|a_{n-2}-a_3|+\ldots+|a_1-a_n|$,当$x=a_{[\frac{n+1}{2}]}$时取等号。

故$d(P)=f(a_{[\frac{n+1}{2}]})=\frac{|a_n-a_1|+|a_{n-1}-a_2|+|a_{n-2}-a_3|+\ldots+|a_1-a_n|}{2n}$.

(1) $d(P_1)=\frac{1}{2}$, $d(P_2)=1$;

(2) 不妨设$a<b<c<d$，则$d(P)$=$\frac{d+c-b-a}{4}$;

(3) （酌情给分）一般性并且可以证明的结论、相应的证明各 1 分。比如三个由具体数值构成的集合的相关结论不给分。

例如，集合的元素个数都是偶数时，$min\{d(A),d(B)\}\leq d(C)$，

否则$d(A)>d(C),d(B)>d(C)$。不妨设

$A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{2m}\}$，$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{2m}$，

$$d(A)=\frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2m})-2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m)}{2m}$$

$B=\{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{2n}\}$， $b_1<b_2<b_3<\ldots<b_{2n}$ ， $d(B)=\frac{(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{2n})-2(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)}{2n}$

$C=A\cup B=\{c_1,c_2,c_3,\ldots,c_{2n+2m}\}$,$c_1<c_2<c_3<\ldots<c_{2n+2m}$，

$d(C)=\frac{(c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{2n+2m})-2(c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{n+m})}{2n+2m}=\frac{[(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2m})+(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{2n})]-2(c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{n+m})}{2n+2m}$

又$c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{n+m}\leq(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m)$+$(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$

故 $d(C)\geq\frac{[(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2m})+(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{2n})]-2[(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m)+(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)]}{2n+2m}=\frac{2md(A)+2nd(B)}{2n+2m}>\frac{2md(C)+2nd(C)}{2n+2m}=d(C)$,这与事实$d(C)=d(C)$矛盾。需证成立。

实际上，以上证明对三个集合的元素个数不都是偶数的情况也是成立的。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！