2023届高三年级5月份大联考

数学试题

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3.非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4.考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.设复数 z 满足 $z(1+2\mathrm{i})=\left|1+2\sqrt{6}\mathrm{i}\right|$，则 z 的虚部为

A. $-2\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. -2　　D. 2

2.已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 3x-a<0\}$，且 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{1,2\}$，则 a 的取值范围为

A. $(0,4)$　　B. $(0,4]$

C. $(0,3]$　　D. $(0,3)$

3.对两组变量进行回归分析，得到不同的两组样本数据，第一组对应的相关系数，残差平方和，决定系数分别为 r_1,S_1^2,R_1^2，第二组对应的相关系数，残差平方和，决定系数分别为 r_2,S_2^2,R_2^2，则

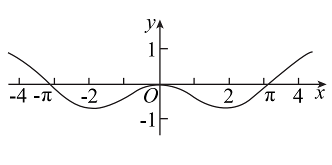
A.若 $r_1>r_2$，则第一组变量比第二组的线性相关关系强

B.若 $r_1^2>r_2^2$，则第一组变量比第二组的线性相关关系强

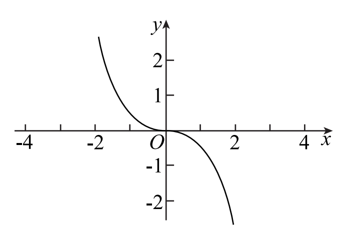
C.若 $S_1^2>S_2^2$，则第一组变量比第二组变量拟合的效果好

D.若 $R_1^2>R_2^2$，则第二组变量比第一组变量拟合的效果好

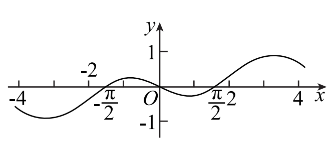
4.函数 $f(x)=\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}-1\right)\cos x$ 的部分图象为



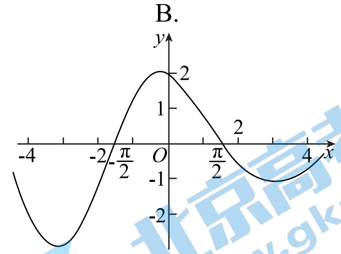
A.



B.



C.

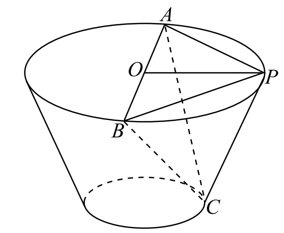


D.

5.在锐角△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．且 $b=1$，$\cos A-a\cos B=a$，则

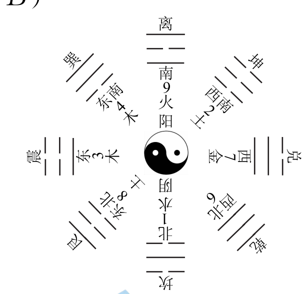
A. $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}$

6.如图，某车间生产一种圆台形零件，其下底面的直径为4 cm，上底面的直径为8 cm，高为4 cm，已知点 P 是上底面圆周上不与直径 AB 端点重合的一点，且 $AP=BP$，O 为上底面圆的圆心，则 OP 与平面 ABC 所成的角的正切值为



A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

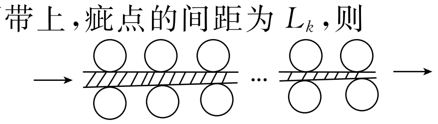
7.《易经》是中国传统文化中的精髓，下图是易经后天八卦图（含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦），每一卦由三根线组成（——表示一根阳线，— —表示一根阴线），从八卦中任取两卦，记事件 A＝"两卦的六根线中恰有三根阳线"，B＝"至少有一卦恰有两根阳线"，则 $P(A|B)=$



后天八卦图

A. $\dfrac{3}{28}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

8.定义：一对轧辊的减薄率＝$\dfrac{\text{输入该对的面带厚度}-\text{输出该对的面带厚度}}{\text{输入该对的面带厚度}}$．如图所示，为一台擀面机的示意图，擀面机由若干对轧辊组成，面带从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出．已知擀面机每对轧辊的减薄率都为0.2（轧面的过程中，面带宽度不变，且不考虑损耗）．有一台擀面机共有10对轧辊，所有轧辊的横截面积均为 $\dfrac{640\ 000}{\pi}\ \mathrm{mm}^2$，若第 k 对轧辊有缺陷，每滚动一周在面带上压出一个疵点，在擀面机输出的面带上，疵点的间距为 L_k，则



A. $L_k=1\ 600\times0.2^{10-k}$ mm　　B. $L_k=1\ 600\times0.2^{k-10}$ mm

C. $L_k=1\ 600\times0.8^{10-k}$ mm　　D. $L_k=1\ 600\times0.8^{k-10}$ mm

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9.已知平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,-2,-\dfrac{1}{2}\right)$，平面 β 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,0,-2)$，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$，直线 m 的方向向量为 $\boldsymbol{b}=(0,1,-2)$，则

A. $l\parallel\alpha$　　B. $\alpha\perp\beta$

C. l 与 m 为相交直线或异面直线　　D. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 向量上的投影向量为 $\left(0,\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$

10. 若点 $P(2,3)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条斜率为正的渐近线的右侧，c 为半焦距，则

A. $\frac{a+b}{c}>1$　　B. $\frac{b+c}{a}>2$　　C. $\frac{b}{a}<\frac{3}{2}$　　D. $\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{13}}{2}$

11. 若 $f(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$，则

A. $f(x)$ 可以被 $(x-1)^3$ 整除　　B. $f(x+y+1)$ 可以被 $(x+y)^4$ 整除

C. $f(30)$ 被 27 除的余数为 6　　D. $f(29)$ 的个位数为 6

12. 若存在直线与曲线 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2-a^2+a$ 都相切，则 a 的值可以是

A. 0　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\log_2\sqrt{7}$　　D. $\frac{\sqrt{e}}{\pi}+\frac{\pi}{\sqrt{e}}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 A,B,C,D 是四个命题，A 是 B 的必要不充分条件，A 是 C 的充分不必要条件，D 是 B 的充分必要条件，那么 D 是 C 的________条件.（充分不必要、必要不充分、充要、既不充分又不必要四选一）

14. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=14$，$S_5=55$，数列 $\{a_{3n-1}\}$ 的前 10 项的和为________.

15. 设 $\triangle ABC$ 内接于椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A$ 与椭圆的上顶点重合，边 BC 过 E 的中心 O，若 AC 边上中线 BD 过点 $F(0,c)$，其中 c 为椭圆 E 的半焦距，则该椭圆的离心率为________.

16. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[M,N]$，则 $N-M$ 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_4=\frac{15}{8}$，且 $a_1,3a_3,a_2$ 成等差数列.

（1）证明：数列 $\{S_n-2\}$ 是等比数列；

（2）若 $b_n=a_n(\log_2 a_n-1)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

西藏隆子县玉麦乡位于喜马拉雅山脉南麓，地处边疆，山陡路险，交通闭塞. 党的十八大以来，该地区政府部门大力开发旅游等产业，建设幸福家园，实现农旅融合，以创建国家全域旅游示范区为牵引，构建“农业＋文创＋旅游”发展模式，真正把农村建设成为“望得见山、看得见水、记得住乡愁”的美丽乡村，在新政策的影响下，游客越来越多. 当地旅游局统计了玉麦乡景区 2023 年 1 月份到 5 月份的接待游客人数 y（单位：万人），统计结果如下：

月份 x	1	2	3	4	5
接待游客人数 y（单位：万人）	1.2	1.8	2.5	3.2	3.8

（1）求相关系数 r 的值，当 $r>0.75$ 时，线性关系为较强，请说明 2023 年 1－5 月份 x 与接待游客人数 y 之间线性关系的强弱；若线性相关，求出 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）为打造群众满意的旅游区，该地旅游部门对所推出的报团游和自助游项目进行了深入调查，下表是从接待游客中随机抽取的 30 位游客的满意度调查表，请将下述 2×2 列联表补充完整，并依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，分析游客对本地景区的满意度是否与报团游或自助游有关联.

	报团游	自助游	合计
满意		3	18
不满意	5		
合计		10	30

附：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率及截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，参考数据：$\sqrt{43.6}\approx 6.603$.

附表：

α	0.10	0.05	0.010	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828

19.（本小题满分 12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，分别以 a,b,c 为边长的正三角形的面积依次为 S_1,S_2,S_3，已知 $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\cos B=\frac{5}{13}$.

（1）计算 $\triangle ABC$ 的面积；

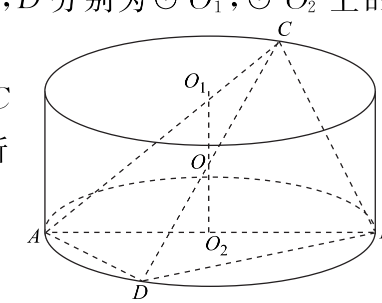
（2）若 $\cos A=\frac{3}{5}$，求 $(a+b+c)^2$.

20.（本小题满分 12 分）

如图，AB 为圆柱 O_1O_2 的下底面 $\odot O_2$ 的直径，C,D 分别为 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 上的点，线段 CD 与线段 O_1O_2 交于 O 点.

（1）证明：O 为线段 O_1O_2 的中点；

（2）若圆柱 O_1O_2 的体积和侧面积都为 8π，且 AC 与下底面所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，求平面 ACD 与平面 BCD 所成锐角的余弦值.



21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系中 xOy 中，动点 E 到定点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 1，E 的轨迹为 C.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 分别为曲线 C 上的第一象限和第四象限的点，且 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{9}{4}$，求 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=-a\ln x+\frac{x^2+1-a}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=2$ 时，证明：$f(x)\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立；

（2）判断函数 $f(x)$ 的零点个数.

2023届高三年级5月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. C 【解析】由 $z(1+2\mathrm{i})=\left|1+2\sqrt{6}\mathrm{i}\right|$ 可得 $z=\dfrac{\left|1+2\sqrt{6}\mathrm{i}\right|}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{5}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{5(1-2\mathrm{i})}{5}=1-2\mathrm{i}$，则 z 的虚部为 -2. 故选 C.

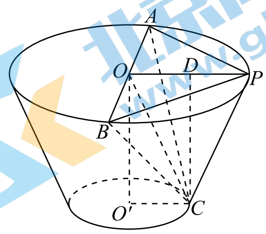
2. C 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid-1<x<3\}=\{0,1,2\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid 3x-a\geqslant 0\}=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{a}{3}\right\}$，因为 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{1,2\}$，所以 $0<\dfrac{a}{3}\leqslant 1$，解得 a 的取值范围为 $(0,3]$. 故选 C.

3. B 【解析】一组变量之间的相关系数为 $|r|$ 越大，则具有较强的线性相关关系，例 $r_1=0.1>-0.9=r_2$，则第二组变量比第一组的线性相关关系强，故 A 不正确，B 正确；残差平方和越小的模型，拟合的效果越好，故 C 不正确；用决定系数 R^2 来刻画回归效果，R^2 越大说明拟合效果越好，故 D 不正确. 故选 B.

4. C 【解析】因为 $f(x)=\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}-1\right)\cos x$ 为奇函数，图象关于原点对称，所以排除 A，D. 因为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，所以排除 B. 故选 C.

5. A 【解析】$\because b=1$，$\cos A-a\cos B=a$，$\therefore b\cos A-a\cos B=a$，$\therefore$ 由正弦定理得，$\sin B\cos A-\sin A\cos B=\sin A$，$\therefore\sin(B-A)=\sin A$，$\therefore B-A=A$ 或 $B-A+A=\pi$，解得：$B=2A$ 或 $B=\pi$(舍)，又 $\because\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $C=\pi-A-B=\pi-3A$，$\therefore\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<2A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\pi-3A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$. 故选 A.

6. A 【解析】设 O' 为下底面圆的圆心，连接 OO'，CO' 和 CO，因为 $AP=BP$，所以 $AB\perp OP$，又因为 $AB\perp OO'$，$OP\cap OO'=O$，OP、$OO'\subset$ 平面 $OO'P$，所以 $AB\perp$ 平面 $OO'P$，因为 PC 是该圆台的一条母线，所以 O,O',C,P 四点共面，且 $O'C\,/\!/\,OP$，又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 POC，又因为平面 $ABC\cap$ 平面 $POC=OC$，所以点 P 在平面 ABC 的射影在直线 OC 上，则 OP 与平面 ABC 所成的角即为 $\angle POC=\angle OCO'$，过点 C 作 $CD\perp OP$ 于点 D，因为 $OP=4$ cm，$O'C=2$ cm，所以 $\tan\angle POC=\tan\angle OCO'=\dfrac{OO'}{O'C}=2$. 故选 A.



7. C 【解析】由八卦图可知，八卦中全为阳线和全为阴线的卦各有一个，两阴一阳和两阳一阴的卦各有三个，所以 $P(AB)=\dfrac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_8^2}=\dfrac{9}{28}$，$P(B)=\dfrac{\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_8^2}=\dfrac{9}{14}$，所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

8. D 【解析】设轧辊的半径为 r，则 $\pi r^2=\dfrac{640\ 000}{\pi}$，所以 $r=\dfrac{800}{\pi}$，所以轧辊的周长为 $2\pi r=1\ 600$ mm，设输入

第一对面带的厚度为 β mm，宽度为 γ mm，因为第 k 对轧辊出口处相邻疵点间距离为轧辊周长，所以在第 k 对出口处的两疵点间面带的体积为 $1\ 600\beta(1-0.2)^k\gamma(\text{mm}^3)$，而在擀面机出口处两疵点间面带的体积为 $L_k\beta(1-0.2)^{10}\gamma(\text{mm}^3)$，因宽度相等，且无损耗，由体积相等得，$1\ 600\beta(1-0.2)^k\gamma=L_k\beta(1-0.2)^{10}\gamma$，所以 $L_k=1\ 600\times0.8^{k-10}$ mm. 故选 D.

二、多选题

9. BC 【解析】A. 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，所以 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$，所以 A 错误；B. 因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，所以 $\alpha\perp\beta$，所以 B 正确；C. 显然 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 不成立，所以 l 与 m 为相交直线或异面直线，所以 C 正确；D. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 向量上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{4}{5}\times(0,1,-2)=\left(0,-\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$，所以 D 错误. 故选 BC.

10. ABD 【解析】因为 $a^2+b^2=c^2$，$a<b$，所以 $a<b<c$，且 a,b,c 为一个直角三角形的三边，所以 $a+b>c$，$2a<b+c$，所以 $\dfrac{a+b}{c}>1$，$\dfrac{b+c}{a}>2$，所以 A，B 成立；双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条斜率为正的渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，因为点 $P(2,3)$ 在渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 的右侧，所以 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}>\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，所以 C 不成立，D 成立. 故选 ABD.

11. AB 【解析】由二项式定理得，$f(x)=(x-1)^5$，所以 $f(x)$ 可以被 $(x-1)^3$ 整除，所以 A 正确；$f(x+y+1)=(x+y)^5$ 可以被 $(x+y)^4$ 整除，所以 B 正确；C. $f(30)=29^5=(27+2)^5=27^5+C_5^1\times27^4\times2+\cdots+C_5^4\times27\times2^4+C_5^5\times2^5$ 所以 $f(30)$ 被 27 除的余数即为 2^5 被 27 除的余数为 5，所以 C 错误；D. $f(29)=28^5$，而 28^5 与 8^5 的个位数相同，所以 $f(29)$ 的个位数为 8，故 D 错误. 故选 AB.

12. ABC 【解析】设该直线与 $f(x)$ 相切于点 $(x_1,x_1^3-x_1)$，因为 $f'(x)=3x^2-1$，所以 $f'(x_1)=3x_1^2-1$，所以该切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，即 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$. 设该直线与 $g(x)$ 相切于点 $(x_2,x_2^2-a^2+a)$，因为 $g'(x)=2x$，所以 $g'(x_2)=2x_2$，所以该切线方程为 $y-(x_2^2-a^2+a)=2x_2(x-x_2)$，即 $y=2x_2x-x_2^2-a^2+a$，所以 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=-x_2^2-a^2+a\end{cases}$，所以 $-a^2+a=x_2^2-2x_1^3=\left(\dfrac{3x_1^2-1}{2}\right)^2-2x_1^3=\dfrac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{4}$，令 $h(x)=\dfrac{9}{4}x^4-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{4}$，$\therefore h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$；$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(0,1)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；$\therefore h(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$，$(0,1)$ 上单调递减；在 $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增；又 $h\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{27}$，$h(1)=-1$，所以 $h(x)\in[-1,+\infty)$，所以 $-a^2+a\geqslant-1$，解得，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$，A. A 显然正确；B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}-(2+\sqrt{2})}{4}>0$，所以 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}<0$，所以 B 正确；C. 因为 $0<\log_2\sqrt{7}<\log_2 2\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 C 正确；D. 因为 $\dfrac{\sqrt{e}}{\pi}+\dfrac{\pi}{\sqrt{e}}>2\sqrt{\dfrac{\sqrt{e}}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{\sqrt{e}}}=2>$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,所以 D 不正确.故选 ABC.

三、填空题

13.充分不必要 【解析】$D\Leftrightarrow B\Rightarrow A\Rightarrow C$,所以 $D\Rightarrow C$,但 A 不能推出 B,且 C 不能推出 A,所以 D 是 C 的充分不必要条件.故答案为充分不必要.

14.-265 【解析】由 $S_5=55$ 得,$5a_3=55$,所以 $a_3=11$,所以公差 $d=a_3-a_2=-3$,所以 $a_n=a_2+(n-2)d=20-3n$,所以 $a_{3n-1}=23-9n$,所以数列 $\{a_{3n-1}\}$ 的前 10 项的和为 $\frac{10\times(14-67)}{2}=-265$.故答案为 -265.

15.$\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】根据题意,O 是 BC 中点,所以 AO 是 $\triangle ABC$ 的中线,又 BD 是中线,所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重心,所以 $AO=3FO$,所以 $b=3c$,所以 $b^2=9c^2$,$a^2-c^2=9c^2$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.故答案为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16.$\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$ 【解析】由正弦函数的性质可知,当 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调时,$N-M$ 取得最大值,$N-M=\left|f\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-f(\alpha)\right|=\left|\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|\sqrt{3}\cos 2\alpha\right|\leqslant\sqrt{3}$;当 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上不单调,且当 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上的图象具有对称性时,即 $f(x)$ 在 $x=\frac{\alpha+\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}=\alpha+\frac{\pi}{6}$ 取得最大值或最小值时,$N-M$ 取得最小值,此时有 $2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,则 $N-M=\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin 2\alpha\right|=\left|\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|\sin\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right|=\frac{1}{2}$,以 $N-M$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$.故答案为 $\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$.

四、解答题

17.解:(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,

因为 $a_1,3a_3,a_2$ 成等差数列,所以 $6a_3=a_1+a_2,q\neq1$,所以 $6a_1q^2=a_1+a_1q$,

所以 $6q^2=1+q$,又 $q>0$,所以 $q=\frac{1}{2}$,

因为 $S_4=\frac{15}{8}$,所以 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{15}{8}$,所以 $a_1=1$,

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, (3 分)

所以 $S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$S_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,$\forall n\in\mathbf{N}^*$,所以 $\frac{S_{n+1}-2}{S_n-2}=\frac{1}{2}$,

又 $S_1-2=-1$,所以数列 $\{S_n-2\}$ 是首项为 -1,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列; (5 分)

(2)由(1)得,$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right]=-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, (6 分)

所以 $-T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ①,

$-\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ②, (8 分)

① − ② 得,$-\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=$

$2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-(2+n)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

（9 分）

整理得：$T_n=(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-4$.（10 分）

18. **解**：(1)由题中数据可得：

$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{1.2+1.8+2.5+3.2+3.8}{5}=\frac{12.5}{5}=2.5$，

$\therefore\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-1.3)+(-1)\times(-0.7)+0+1\times0.7+2\times1.3=6.6$，

（2 分）

又 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=4.36$，

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$=\frac{6.6}{\sqrt{10}\times\sqrt{4.36}}=\frac{6.6}{\sqrt{43.6}}\approx\frac{6.6}{6.603}>0.75.$$

（4 分）

故 2023 年 1－5 月份 x 与接待游客人数 y 之间有较强的线性相关程度.

由上可知，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{6.6}{10}=0.66$，

$\therefore\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=2.5-0.66\times3=0.52$，

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.66x+0.52$.

（6 分）

(2) 零假设为

H_0：游客对本地景区满意度与报团游或自助游无关联.

依题意，完善表格如下：

	报团游	自助游	合计
满意	15	3	18
不满意	5	7	12
合计	20	10	30

（8 分）

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2=\frac{30\times(15\times7-15)^2}{20\times10\times18\times12}=5.625>3.841=x_{0.05}$，

（10 分）

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为游客对本地景区满意度与报团游或自助游有关联.（12 分）

19. **解**：(1)由题意得 $S_1=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，则 $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 $a^2+c^2-b^2=2\sqrt{2}$，（2 分）

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=\sqrt{2}$，

因为 $\cos B=\frac{5}{13}$，所以 $\sin B=\frac{12}{13}$，（4 分）

所以 $ac=\frac{\sqrt{2}}{\cos B}=\frac{13\sqrt{2}}{5}$，（5 分）

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{6\sqrt{2}}{5}$.（6 分）

(2)因为 $\cos A=\frac{3}{5}$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$，

$\sin C=\sin(A+B)=\frac{4}{5}\cos B+\frac{3}{5}\sin B=\frac{56}{65}$，

（8 分）

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

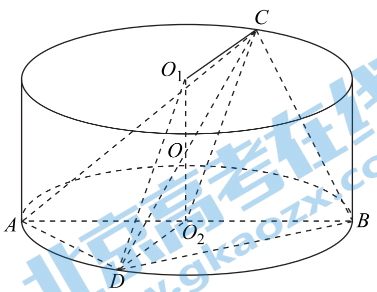
所以 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\sqrt{\frac{ac}{\sin A\sin C}}$，（10 分）

所以 $a+b+c=(\sin A+\sin B+\sin C)\sqrt{\frac{ac}{\sin A\sin C}}$

$$=\frac{168}{65}\sqrt{\frac{\frac{13\sqrt{2}}{5}}{\frac{4}{5}\times\frac{56}{65}}}=\frac{3}{5}\sqrt{70\sqrt{2}},$$

所以 $(a+b+c)^2=\frac{126\sqrt{2}}{5}$.(12 分)

20. **解**:(1)连接 O_1C,O_2C,O_1D,O_2D,如图所示,



因为线段 CD 与线段 O_1O_2 交于 O 点,所以 C,O_1,D,O_2 四点共面,又因为圆柱 O_1O_2 的上下底面平行,所以 $O_1C/\!/O_2D$, (2 分)

因为 $O_1C=O_2D$,所以四边形 CO_1DO_2 为平行四边形,

所以 $OO_1=OO_2$,即 O 为线段 O_1O_2 的中点; (4 分)

(2)设圆柱的底面半径和高分别为 r,h,

因为圆柱 O_1O_2 的体积和侧面积都为 8π,所以 $\begin{cases}\pi r^2h=8\pi\\2\pi rh=8\pi\end{cases}$,

所以 $r=h=2$. (5 分)

延长 DO_2 交⊙ O_2 于点 E,连接 CE,因为 E 在⊙ O_2 上,AB 为⊙ O_2 的直径,

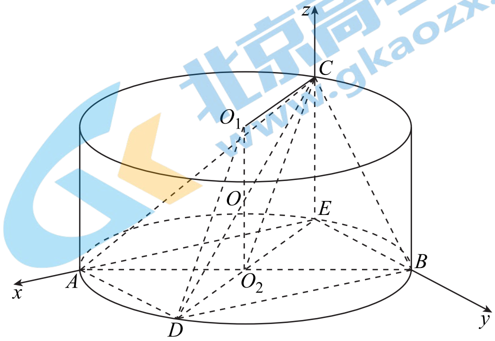
所以 $AE\perp BE$,因为 $O_1C=O_2E$,$O_1C/\!/O_2E$,所以四边形 CO_1O_2E 为平行四边形,

所以 $O_1O_2/\!/CE$,所以 $CE\perp$平面 ABE, (6 分)

所以 $\angle CAE$ 为直线 AC 与下底面所成的角,所以 $\angle CAE=\frac{\pi}{6}$,

因为 $CE=2$,所以 $AE=2\sqrt{3}$,所以 $BE=2$. (7 分)

因为 EA,EB,EC 两两垂直,如图所示,以 E 为坐标原点,$\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC}$的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



所以 $A(2\sqrt{3},0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(0,0,2)$,$D(2\sqrt{3},2,0)$,

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{CD}=(2\sqrt{3},2,-2)$,$\overrightarrow{BD}=(2\sqrt{3},0,0)$,

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$,

则$\begin{cases}2y=0\\2\sqrt{3}x+2y-2z=0\end{cases}$,不妨取 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,\sqrt{3})$,

(9 分)

同理可求平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$,

(10 分)

设平面 ACD 与平面 BCD 所成的锐角为 θ,

所以 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

即平面 ACD 与平面 BCD 所成锐角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(12 分)

21. **解**:(1)设动点 E 的坐标为 (x,y),由已知得,$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$,

化简得:$y^2=\begin{cases}4x,x\geqslant0\\0,x<0\end{cases}$,故曲线 C 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x,x\geqslant0\\0,x<0\end{cases}$; (2 分)

(2)因为点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$分别为曲线 C 上的第一象限和第四象限的点,所以当直线 AB 的斜率为 0 时,不适合题意;当直线 AB 的斜率不为 0 时,设直线 AB 的方程为 $x=ay+t$,

由$\begin{cases}x=ay+t\\y^2=4x\end{cases}$得,$y^2-4ay-4t=0$,$\Delta=16a^2+16t>0$,

所以$\begin{cases}y_1+y_2=4a\\y_1y_2=-4t\end{cases}$,　　(4 分)

由 $y_1y_2=-4t<0$,得 $t>0$,

因为 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{9}{4}$,所以 $(ay_1+t)(ay_2+t)+y_1y_2=\frac{9}{4}$,所以 $(a^2+1)y_1y_2+at(y_1+y_2)+t^2=\frac{9}{4}$,

所以$(a^2+1)(-4t)+at\cdot 4a+t^2=\frac{9}{4}$,

解得:$t=\frac{9}{2}$或 $t=-\frac{1}{2}$(舍去),　　(6 分)

当 $t=\frac{9}{2}$时,直线 AB 的方程为 $x=ay+\frac{9}{2}$,直线 AB 过定点$\left(\frac{9}{2},0\right)$,且满足 $\Delta>0$,且 $y_1y_2=-4t=-18$,　　(8 分)

所以 $S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times|y_1-y_2|+\frac{1}{2}y_1=\frac{11}{4}y_1-\frac{9}{4}y_2\geqslant 2\sqrt{\frac{11}{4}y_1\cdot\left(-\frac{9}{4}y_2\right)}=\frac{3}{2}\sqrt{-11y_1y_2}=\frac{9}{2}\sqrt{22}$,　　(11 分)

当且仅当 $\frac{11}{4}y_1=-\frac{9}{4}y_2$,即 $y_1=\frac{9\sqrt{22}}{11}$,$y_2=-\sqrt{22}$时取等号,故最小值为$\frac{9}{2}\sqrt{22}$.　　(12 分)

22. **解**:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=-2\ln x+x-\frac{1}{x}$,$x\in[1,+\infty)$,

所以 $f'(x)=-\frac{2}{x}+1+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$,当且仅当 $x=1$ 时取等号,

所以 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$,所以结论成立;　　(2 分)

(2)$f'(x)=\frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^2}(x>0)$,

①当 $a-1\leqslant 0$,即 $a\leqslant 1$ 时,$x-(a-1)>0$,

所以当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减;

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

故 $f(x)\geqslant f(1)=-a+2>0$,因此函数 $f(x)$没有零点;　　(3 分)

②当 $a-1>1$,即 $a>2$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$ 或 $x>a-1$;令 $f'(x)<0$,得 $1<x<a-1$,

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,a-1)$上单调递减,在$(a-1,+\infty)$上单调递增,

故 $f(x)$的极大值 $f(1)=-a+2<0$,$f(e^a)=e^a-a^2-\frac{a}{e^a}+\frac{1}{e^a}$,　　(4 分)

令 $F(x)=e^x-x^2-x(x>2)$,则 $F'(x)=e^x-2x-1$,

令 $\varphi(x)=e^x-2x-1(x>2)$,则 $\varphi'(x)=e^x-2>0$,

所以 $F'(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增,所以$F'(x)>F'(2)=e^2-5>0$,

所以 $F(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增,$F(x)>F(2)=e^2-6>0$,即 $e^x-x^2>x(x>2)$,

因此 $f(e^a)=e^a-a^2-\frac{a}{e^a}+\frac{1}{e^a}>a-\frac{a}{e^a}+\frac{1}{e^a}=a\left(1-\frac{1}{e^a}\right)+\frac{1}{e^a}>0$,又 $e^a>1$,故函数 $f(x)$只有一个零点;　　(6 分)

③当 $a-1=1$,即 $a=2$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$在

$(0,+\infty)$上单调递增，

又 $f(1)=-a+2=0$，故函数 $f(x)$只有一个零点； (7 分)

④当 $0<a-1<1$，即 $1<a<2$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<a-1$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $a-1<x<1$，所以 $f(x)$在$(0,a-1)$上单调递增，在$(a-1,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $f(x)$的极小值 $f(1)=-a+2>0$， (8 分)

令 $h(x)=\ln x-\sqrt{x}$，则 $h'(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$，

易知当 $x=4$ 时，$h(x)$取得最大值，所以 $h(x)\leqslant h(4)=\ln 4-\sqrt{4}=2(\ln 2-1)<0$，

所以 $\ln x<\sqrt{x}$，令 $m=\frac{(a-1)^2}{4a^2}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)^2$，则 $0<m<\frac{1}{16}<1$， (9 分)

所以 $f(m)=-a\ln m+m+\frac{1-a}{m}=a\ln\frac{1}{m}+\frac{1-a}{m}+m$，由 $m=\frac{(a-1)^2}{4a^2}$得 $\sqrt{m}=\frac{a-1}{2a}$，所以 $f(m)<a\sqrt{\frac{1}{m}}+\frac{1-a}{m}+m=\frac{a\sqrt{m}+1-a}{m}+m<\frac{a\cdot\frac{a-1}{2a}+1-a}{m}+1=\frac{m-\frac{a-1}{2}}{m}$，

由$\frac{a-1}{2a}<\frac{a-1}{2}<1$ 得，$m=\frac{(a-1)^2}{4a^2}<\frac{a-1}{2}$，所以

$f(m)<\frac{m-\frac{a-1}{2}}{m}<0$，

所以函数 $f(x)$只有一个零点， (11 分)

综上，当 $a\leqslant 1$ 时，函数 $f(x)$没有零点；当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$只有一个零点. (12 分)