石景山区 2022—2023 学年第一学期高三期末试卷

数　学

本试卷共 7 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$， $B=\{x\,\|\,x|\leqslant 1\}$，则 $A\cap B$ 等于

（A） $\{-1,0,1\}$　　（B） $\{0,1,2\}$

（C） $\{0,1\}$　　（D） $\{1,2\}$

（2）在复平面内，复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）若 $(2+x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_3=$

（A） 10　　（B） 20

（C） 40　　（D） 80

（4）已知直线 $l:x+2y-3=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x=0$ 交于 A,B 两点，则线段 AB 的垂直平分线方程为

（A） $2x-y-4=0$　　（B） $2x+y-4=0$

（C） $x-2y-2=0$　　（D） $2x-y-2=0$

（5）已知直线m,n与平面α,β,γ，满足$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\perp\alpha$，$n\subset\gamma$，则下列判断一定正确的是

（A）$m\,//\,\gamma$，$\alpha\perp\gamma$　　（B）$n\,//\,\beta$，$\alpha\perp\gamma$

（C）$\beta\,//\,\gamma$，$\alpha\perp\gamma$　　（D）$m\perp n$，$\alpha\perp\gamma$

（6）已知函数$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$，则下列命题正确的是

（A）$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称

（B）$f(x)$的图象关于点$(\dfrac{\pi}{6},0)$对称

（C）$f(x)$的最小正周期为π，且在$[0,\dfrac{\pi}{12}]$上为增函数

（D）$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位得到一个偶函数的图象

（7）已知数列$\{a_n\}$是$a_1>0$的无穷等比数列，则“$\{a_n\}$为递增数列”是“$\forall k\geqslant 2$且$k\in\mathbf{N}^*$，$a_k>a_1$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）中国茶文化博大精深．茶水口感与茶叶类型和水的温度有关．经验表明，某种绿茶用85℃的水泡制，再等到茶水温度降至60℃时饮用，可以产生最佳口感．已知室内的温度为25℃，设茶水温度从85℃开始，经过x分钟后的温度为y℃．y与x的函数关系式近似表示为$y=60\times0.923^x+25$，那么在25℃室温下，由此估计，刚泡好的茶水大约需要放置多少分钟才能达到最佳口感

（参考数据：$\ln 0.923\approx-0.08$，$\ln 12-\ln 7\approx 0.54$）

（A）8　　（B）7

（C）6　　（D）5

（9）已知 F 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 $M(2,1)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，M 为线段 AB 的中点，若 $|FA|+|FB|=5$，则 p 的值为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　　　（B）1

（C）2　　　　（D）3

（10）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为

（A）2　　　　（B）$\sqrt{5}$

（C）$2\sqrt{2}$　　　　（D）3

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为____________.

（12）首项为1的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$4a_1,2a_2,a_3$ 成等差数列，则公比 $q=$________.

（13）已知双曲线 $mx^2+ny^2=1$ 的一个顶点为 $P(1,0)$，且渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则实数 $m=$__________，$n=$__________.

（14）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA=AB=2$，则此四棱锥的外接球的半径为_______________.

（15）函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$，给出下列四个结论

① $f(x)$ 的值域是 $(-1,1)$；

② 任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

③ 任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$；

④ 规定 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f_{10}(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{12}$.

其中，所有正确结论的序号是____________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

（Ⅰ）求$\angle C$；

（Ⅱ）若$a+2b=16$，$\triangle ABC$的面积为$8\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

条件①：$2c\cos C=a\cos B+b\cos A$；

条件②：$2\sin A\sin B\sin C=\sqrt{3}(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C)$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

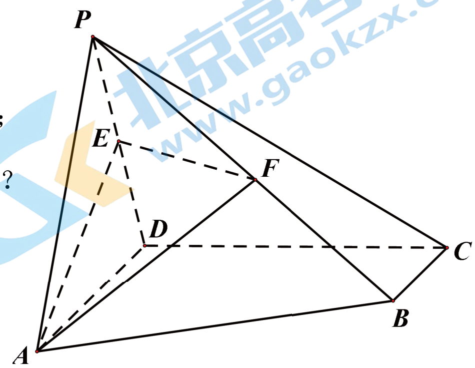
如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$CD\perp$平面PAD，$\triangle PAD$为等边三角形，$AD // BC$，$AD=CD=2BC=2$，E,F分别为棱PD,PB的中点.

（Ⅰ）求证：$AE\perp$平面PCD；

（Ⅱ）求平面AEF与平面PAD所成锐二面角的余弦值；

（Ⅲ）在棱PC上是否存在点G，使得$DG//$平面AEF？

若存在，求$\dfrac{PG}{PC}$的值；若不存在，说明理由.



（18）（本小题 13 分）

某学校有初中部和高中部两个学部，其中初中部有 1800 名学生．为了解全校学生两个月以来的课外阅读时间，学校采用分层抽样方法，从中抽取了 100 名学生进行问卷调查，将样本中的“初中学生”和“高中学生”按学生的课外阅读时间(单位：小时)各分为 5 组：$[0,10),[10,20),[20,30),[30,40),[40,50]$，得到初中生组的频率分布直方图（图 1）和高中生组的频数分布表（表 1）．

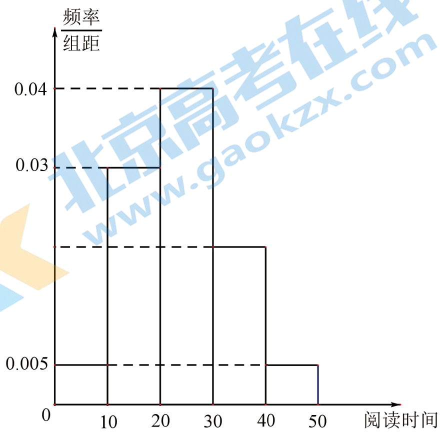


图 1　　初中生组

表 1　高中生组

分组区间	频数
$[0,10)$	2
$[10,20)$	10
$[20,30)$	14
$[30,40)$	12
$[40,50]$	2

（Ⅰ）求高中部的学生人数并估计全校学生中课外阅读时间在 $[30,40)$ 小时内的总人数；

（Ⅱ）从课外阅读时间不足 10 个小时的样本学生中随机抽取 3 人，记 ξ 为 3 人中初中生的人数，求 ξ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）若用样本的频率代替概率，用随机抽样的方法从该校高中部抽取 10 名学生进行调查，其中有 k 名学生的阅读时间在 $[30,40)$ 的概率为 $P_k(k=0,1,2,\cdots,10)$，请直接写出 k 为何值时 P_k 取得最大值．（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-x$， $g(x)=x-a\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $g(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小值，求 a 的值.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个顶点为 $(0,\sqrt{3})$，焦距为 2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2， P 为椭圆 C 上一动点，射线 PF_1, PF_2 分别交椭圆 C 于点 A, B，求证：$\dfrac{|PF_1|}{|AF_1|}+\dfrac{|PF_2|}{|BF_2|}$ 为定值.

（21）（本小题 15 分）

已知项数为 $k(k\in\mathbf{N}^*, k\geqslant 3)$ 的有穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P：

①$1\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$；

②对任意的 $i, j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$，$\dfrac{a_j}{a_i}$ 与 a_ja_i 至少有一个是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

（Ⅰ）分别判断数列 $1,2,4,16$ 和 $2,4,8,16$ 是否具有性质 P，并说明理由；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，求证：$a_k{}^k=(a_1a_2\cdots a_k)^2$；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，且 $\{a_n\}$ 不是等比数列，求 k 的值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

石景山区 2022—2023 学年第一学期高三期末

数学试卷答案及评分参考

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A	（2）D	（3）C	（4）A	（5）D
（6）C	（7）C	（8）B	（9）B	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[-2,0)\cup(0,2]$　　（12）2　　（13）1　$-\frac{1}{4}$

（14）$\sqrt{3}$　　（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）(本小题满分 13 分)

解：（Ⅰ）选择条件①

法 1：由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 及 $2c\cos C=a\cos B+b\cos A$，

得 $2\sin C\cdot\cos C=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

所以 $2\sin C\cos C=\sin(A+B)$．

所以 $2\sin C\cos C=\sin C$．

因为 $0<\angle C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$．

从而 $\cos C=\frac{1}{2}$．所以 $C=\frac{\pi}{3}$． ……………………………………6 分

法 2：由余弦定理：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

及 $2c\cos C=a\cos B+b\cos A$，

可得 $2c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ．

所以 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，从而 $\cos C=\frac{1}{2}$

因为 $0<\angle C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$．……………………………………6 分

选择条件②：由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

及 $2\sin A\sin B\sin C=\sqrt{3}(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C)$

得 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$.

由余弦定理 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

可得 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$，

从而 $\tan C=\sqrt{3}$.

因为 $0<\angle C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）由 $\triangle ABC$ 的面积为 $8\sqrt{3}$，得 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=8\sqrt{3}$

又因为 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $ab=32$

所以 $\begin{cases}ab=32\\ a+2b=16\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=8\\ b=4\end{cases}$

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $c=4\sqrt{3}$

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=12+4\sqrt{3}$. ……………………………………13 分

（17）(本小题满分 14 分)

解：（Ⅰ）法 1：证明：因为 $CD\perp$ 平面 PAD， $AE\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp AE$.

又因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形， E 为 PD 的中点，

所以 $PD\perp AE$，

因为 $CD\cap PD=D$.

所以 $AE\perp$ 平面 PCD . ……………………………………………5 分

法 2：由（Ⅱ）建系可知

$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}，即\begin{cases}2b=0\\ a+\sqrt{3}c=0\end{cases}$$

令 $a=\sqrt{3}$，则 $c=-1,b=0$，于是 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,-1)$

$\overrightarrow{AE}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{m}$，即 $\overrightarrow{AE}/\!/\boldsymbol{m}$

所以 $AE\perp$ 平面 PCD. ……………………………………5 分

（II）取 AD 的中点 O，连结 OP，OB，

因为 $CD\perp$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AD$.

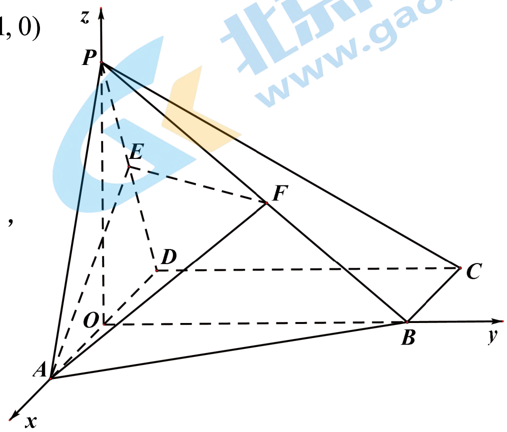
因为 $OB/\!/CD$，所以 $OB\perp AD$，$OB\perp OP$.

因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，所以 $OP\perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

由题意得 $A(1,0,0), E(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}), F(0,1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}), B(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{EF}=(\dfrac{1}{2},1,0)$



设平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$$则\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}，即\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \dfrac{1}{2}x+y=0\end{cases}，$$

令 $x=2$，则 $y=-1,z=2\sqrt{3}$

于是 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2\sqrt{3})$.

易知平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$.

$$\cos<\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}>=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$$

所以平面 AEF 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{17}}{17}$． ……………10 分

（Ⅲ）假设线段 PC 上存在点 G，使得 DG // 平面 AEF，且

设 $\frac{PG}{PC}=\lambda,\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC}$，

$P(0,0,\sqrt{3}),C(-1,2,0),D(-1,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,2,-\sqrt{3})$，

则 $G(-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{DG}=(1-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，

要使得 DG // 平面 AEF，则 $\overrightarrow{DG}\cdot\boldsymbol{n}=2-2\lambda-2\lambda+6-6\lambda=0$，

得 $\lambda=\frac{4}{5}$．所以线段 PC 上存在点 G，

使得 DG // 平面 AEF，$\frac{PG}{PC}=\frac{4}{5}$． ……………………………………………14 分

（18）(本小题满分 13 分)

解：（Ⅰ）由频数分布表可得： 初中生组抽取的人数为 $100-40=60$．

高中部学生总人数为 $1800\times\frac{40}{60}=1200$．

由频率分布直方图可得：抽样中初中学生中课外阅读时间

在 $[30,40)$ 小时内的人数为

$60\times10(1-0.005-0.03-0.04-0.005)=12$．

抽样中高中学生中课外阅读时间在 $[30,40)$ 小时内的人数为 12 人.

全校学生中课外阅读时间在 $[30,40)$ 小时内的总人数为

$\frac{12}{60}\times1800+\frac{12}{40}\times1200=720$． ………………………4 分

（Ⅱ）由频率分布直方图和频数分布表可知，

样本学生中课外阅读时间不足 10 个小时有 5 人，初中生有 3 人

所以 ξ 的所有可能取值为 1, 2, 3．

$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$； $P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$； $P(\xi=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$ ．

ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E\xi=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$. ……………………………11 分

（Ⅲ）3 ……………………………13 分

（19）(本小题满分 15 分)

解：（Ⅰ）$a=1$，因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，$f'(0)=0$.

又因为 $f(0)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$. …………4 分

（Ⅱ）$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$g'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$.

若 $a\leqslant 0$，则 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

若 $a>0$，$g'(x)=0$ 解得 $x=a$.

$x\in(0,a)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减区间是 $(0,a)$；

$x\in(a,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增区间 $(a,+\infty)$.

综上可知，当 $a\leqslant 0$ 时 $g(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，无减区间；

当 $a>0$ 时 $g(x)$ 的减区间为 $(0,a)$ 增区间为 $(a,+\infty)$. ……………9 分

（Ⅲ）$f'(x)=a\mathrm{e}^x-1$，

若 $a\leqslant 0$，$f'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在定义域内单调递减，无最小值.

若 $a>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{1}{a})$ 上递减，在 $(\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 上递增.

所以当 $a>0$ 时，$f(x)_{\min}=1-\ln\frac{1}{a}=1+\ln a$.

由（Ⅱ）知当 $a>0$ 时 $g(x)_{\min}=a-a\ln a$.

所以 $1+\ln a=a-a\ln a$.

令 $F(x)=x\ln x+\ln x-x+1(x>0)$，$F'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，

令 $H(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$H'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

$H(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增.

所以 $F'(x)_{\min}=H(1)=1>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $F(1)=0$.

故 $a=1$. ……………………………………15 分

（20）(本小题满分 15 分)

解：（Ⅰ）由题意得 $b=\sqrt{3}$，$c=1$.

所以 $a^2=b^2+c^2=4$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………5 分

（Ⅱ）①当点 P 在 x 轴上时，由对称性不妨设点 $P(-2,0)$，此时，A,B 两点重合，

$|PF_1|=|F_2B|=1$，$|PF_2|=|F_1A|=3$，故 $\dfrac{|PF_1|}{|AF_1|}+\dfrac{|PF_2|}{|BF_2|}=\dfrac{10}{3}$.

②当点 P 不在 x 轴上时，由对称性不妨设 $P(x_1,y_1)(y_1>0)$，$A(x_2,y_2)$，$B(x_3,y_3)$，

此时直线 PF_1 的方程为 $x=\dfrac{x_1+1}{y_1}y-1$，

联立 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+1}{y_1}y-1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 整理得 $[3(\dfrac{x_1+1}{y_1})^2+4]y^2-\dfrac{6(x_1+1)}{y_1}y-9=0$，

则 $y_1y_2=\dfrac{-9}{3(\dfrac{x_1+1}{y_1})^2+4}=\dfrac{-9y_1^2}{3x_1^2+6x_1+3+4y_1^2}=\dfrac{-3y_1^2}{2x_1+5}$，

故 $y_2=\dfrac{-3y_1}{2x_1+5}$. 同理可得 $y_3=\dfrac{-3y_1}{-2x_1+5}$.

故 $\dfrac{|PF_1|}{|AF_1|}+\dfrac{|PF_2|}{|BF_2|}=\dfrac{y_1}{-y_2}+\dfrac{y_1}{-y_3}=\dfrac{2x_1+5}{3}+\dfrac{-2x_1+5}{3}=\dfrac{10}{3}$.

综上，$\dfrac{|PF_1|}{|AF_1|}+\dfrac{|PF_2|}{|BF_2|}$ 为定值，且定值为 $\dfrac{10}{3}$. ………………………………15 分

（21）(本小题满分 15 分)

解：（Ⅰ）$1,2,4,16$ 不具有性质 P.

因为 $\frac{16}{2}=8$ 和 $16\times 2=32$ 均不是数列中的项，

所以不具有性质 P.

$2,4,8,16$ 不具有性质 P.

因为 $\frac{16}{16}=1$ 和 $16\times 16=256$ 均不是数列中的项，

所以不具有性质 P. ……………………………………4 分

（Ⅱ）证明：因为 $a_k a_k$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的项，

所以 $\frac{a_k}{a_k}=1$ 为数列 $\{a_n\}$ 的项，故 $a_1=1$.

设 $2\leqslant i\leqslant k$，则 $a_i>1$，

所以 $a_i a_k>a_k$ 均不是数列 $\{a_n\}$ 的项，

故 $\frac{a_k}{a_i}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的项.

且 $1=\frac{a_k}{a_k}<\frac{a_k}{a_{k-1}}<\frac{a_k}{a_{k-2}}<\cdots<\frac{a_k}{a_2}<\frac{a_k}{a_1}=a_k$.

因为 $1\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$，

所以 $\frac{a_k}{a_k}=a_1,\frac{a_k}{a_{k-1}}=a_2,\cdots,\frac{a_k}{a_2}=a_{k-1},\frac{a_k}{a_1}=a_k$

累乘 $\frac{{a_k}^k}{a_1a_2\cdots a_k}=a_1a_2\cdots a_k$，

所以 ${a_k}^k=(a_1a_2\cdots a_k)^2$. ……………………………………9 分

（Ⅲ）当 $k=3$ 时，由（Ⅱ）知 $a_1=1,{a_3}^3=(a_1a_2a_3)^2$，

即 $a_3={a_2}^2$，此时 $\{a_n\}$ 是等比数列.

当 $k=4$ 时，数列$1,2,6,12$ 具有性质 P，但该数列不是等比数列.

下面证明当 $k\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，

由（II）知 $a_1=1$，$\frac{a_k}{a_k}=a_1,\frac{a_k}{a_{k-1}}=a_2,\cdots,\frac{a_k}{a_2}=a_{k-1},\frac{a_k}{a_1}=a_k$，

所以 $\frac{a_k}{a_{k-i}}=a_{i+1}(1\leqslant i\leqslant k-1)$　　①

设 $3\leqslant i\leqslant k-2$，则 $a_{k-1}a_i>a_{k-1}a_2=a_k$，

所以 $\frac{a_{k-1}}{a_i}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的项

由 $1=\frac{a_{k-1}}{a_{k-1}}<\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}<\frac{a_{k-1}}{a_{k-3}}<\cdots<\frac{a_{k-1}}{a_3}<\frac{a_k}{a_3}=a_{k-2}$

因为 $1\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{k-2}$

所以 $\frac{a_{k-1}}{a_{k-1}}=a_1,\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}=a_2,\frac{a_{k-1}}{a_{k-3}}=a_3,\cdots,\frac{a_{k-1}}{a_3}=a_{k-3}$，

所以 $\frac{a_{k-1}}{a_{k-i}}=a_i(1\leqslant i\leqslant k-3)$

因为　$k\geqslant 5$，$\frac{a_{k-1}}{a_{k-1}}=a_1,\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}=a_2$，故 $\frac{a_{k-1}}{a_1}=a_{k-1},\frac{a_{k-1}}{a_2}=a_{k-2}$

所以 $\frac{a_{k-1}}{a_{k-i}}=a_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$　　②

①式②式相除得 $\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{a_{i+1}}{a_i}$，所以当 $k\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，

综上，$k=4$ 满足题意.　　　　……………………………………15 分

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。