……题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑……在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z(i-1)=2i$，其中 i 为虚数单位，则 z 的共轭复数的虚部为

A. -1　　B. 1　　C. i　　D. $-i$

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|y=\sqrt{2-x}\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x-3}\geq 0\right.\right\}$，则 $A\cap \complement_U B=$

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(1,2]$

C. $(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$　　D. $(1,3)$

3. 已知二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{a}{x}\right)^{[illegible]}$ 的展开式中，含 x 项的系数为 [illegible]，则实数 a 的值为

A. -5　　B. 5　　C. [illegible]2　　D. 2

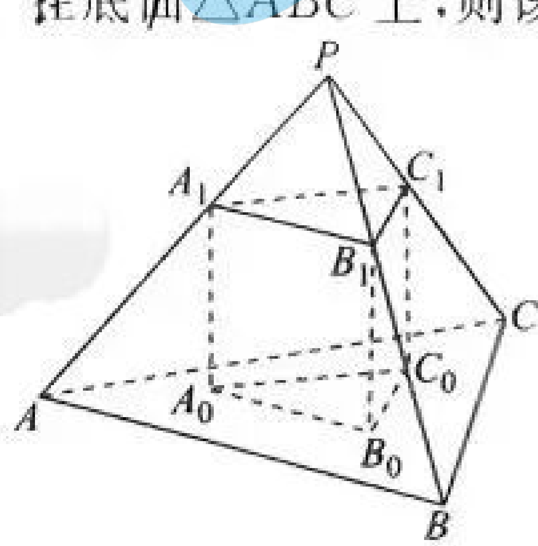
4. 若 $x,y\in\mathbf{R}$，向量 $\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,y)$，$\boldsymbol{c}=([illegible]2,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 [illegible]

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. [illegible]

5. 已知函数 $f(x)=\ln x$，若函数 $g(x)=\lambda f(x)-2[illegible]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)-1$ 在区间 [illegible] 上有两个零点，则正实数 λ 的取值范围为

A. $\lambda>1$　　B. $0<\lambda<1$　　C. $\lambda>[illegible]$　　D. $0<\lambda<2$

6. 我国华为公司具有知识产权的第五代移动通信技术（简称 5G）是具有高速率、低时延和大连接特点的新一代移动通信技术，是实现人机物互联的网络基础设施. 如图为"华为企业"在某山上的信号接收塔，该接收塔可近似作为底面边长为 5 米，高为 10 米的正三棱锥 $P-ABC$，若公司为了减少建造费用，要在该棱锥内部建造一个正三棱柱机房，要求上顶点 A_1,B_1,C_1 分别在三棱锥的侧棱上，下顶点 A_0,B_0,C_0 在底面 $\triangle ABC$ 上，则该机房体积的最大值为



A. $\frac{250\sqrt{3}}{23}\ m^3$　　B. $\frac{250\sqrt{3}}{27}\ m^3$　　C. $\frac{289\sqrt{3}}{27}\ m^3$　　D. $\frac{360\sqrt{3}}{27}\ m^3$

"剩余定理"又称"孙子定理"，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题，叫做"物不知数"，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？现有这样一个相关的问题，数列$\{a_n\}$由被2除余1，且被3除余2的正整数按照从小到大的顺序排列而成，则数列$\left\{\frac{6n^2+27}{1+a_n}\right\}$取最小值时$n$的值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率等于焦距，且焦点到渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$C$的一条渐近线被圆$(x-1)^2+y^2=2$截得的弦长为

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

9. 已知$\sin\alpha-\cos\alpha=-$[illegible]$\left(0<\alpha<\frac{3\pi}{4}\right)$，则$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$

A. $\frac{17\sqrt{2}}{50}$　　B. $\frac{13\sqrt{2}}{50}$

C. $\frac{17\sqrt{2}}{52}$　　D. $\frac{19\sqrt{2}}{52}$

10. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线方程是$x=-1$，若C上存在两点A,B关于直线$x+y-5=0$对称，则直线AB的方程为

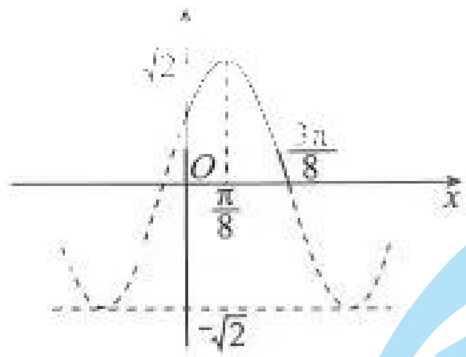
A. $x-y-2=0$

B. $x-y+1=0$

C. $x-y+3=0$

D. [illegible]

11. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，将$f(x)$的图象沿着$x$轴向右平移$\frac{7\pi}{24}$个单位长度得到函数$g(x)$，若$g(x)$在区间[illegible]上单调递增，则$k$的最大值为



A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

12. 已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=2BC$，点M为棱C_1D_1中点，直线BC到平面ADM的距离为$\frac{12\sqrt{5}}{5}$，则该长方体外接球的表面积为

A. 60π　　B. 68π　　C. 76π　　D. 81π

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第13～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22～23题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共4小题，每小题5分。

13. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}-x+y-1\leqslant 0\\5x-3y-3\leqslant 0\\2x+y+2\geqslant 0\end{cases}$，则$z=3x+y$的最大值是______

14. 设$f(x)=2^x-2^{-x}+2x-1$，则不等式$f(3+x^2)+f(3-5x)$ [illegible] 2的解集为______

15. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$c=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，$\cos A=$ [illegible]$\frac{3}{5}$，若$\triangle ABC$的面积为

新能源汽车受到越来越多消费者的青睐.某大型新能源汽车厂生产货车、小轿车、小客车三类新能源汽车.2023 年 1 月份该厂在某市共销售货车 200 辆,小轿车 900 辆,小客车 a 辆.该厂销售部门为了增加本厂新能源汽车在该市的销售量,决定在该市实行抽奖活动.销售部门若从 1 月份购买该厂汽车的所有人员中随机抽取 1 人,则抽到货车或小轿车购买者的概率为 $\frac{11}{12}$.现销售部门决定从 1 月份货车和小客车的所有购买者中用分层抽样的方法随机抽取 6 人,分别赠送一台洗衣机,然后再从这 6 人中随机抽取 2 人分别奖励 600 元红包,则这两人都是货车购买者的概率为______.

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$a_1=2$,$a_{n+1}=2+3S_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}n}{\log_2 a_n \log_2 a_{n+1}}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.(本小题满分 12 分)

某村作为乡村振兴示范点,通过充分利用村落中原有的资源,引进多家知名民宿品牌,设计了当地独特的土坯房文化、茶马文化,展现乡村古朴风貌,为游客提供融入自然、文化与生产生活方式的沉浸式、个性化体验,每逢周末和节假日,来此旅游的游客络绎不绝.下面是该村委在 2022 年统计的其中五个月份 x 与该月前来旅游的人数 y 之间的数据:

月份:x	2	3	5	7	8
旅游人数:y(单位:万人)	30	40	55	70	80

(1)请计算相关系数 r,并判断是否可以认为 y 与 x 具有很强的相关性?(若 $|r|>0.75$,则线性相关性很强,可用线性回归模型拟合)

(2)请根据上表提供的数据,求出 y 关于 x 的线性回归方程,并预测 2022 年 10 月份前来旅游的人数为多少万人?(预测结果按四舍五入保留整数)

参考公式:$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

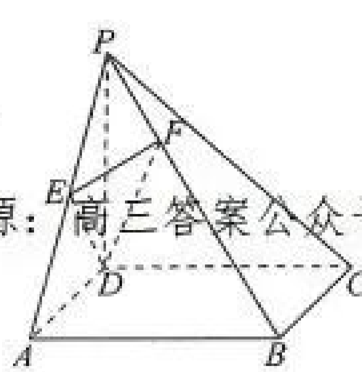
参考数据:$\sqrt{442}\approx 21.0238$.

19.(本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$,$PD\perp$ 底面 $ABCD$,$ABCD$ 是矩形,$AB=2AD=4$,点 E 是侧棱 PA 的中点,点 F 为线段 PB 上一点,且 $FB=2FP$.

(1)若 $PD=AD$,求证:$PB\perp DF$;

(2)若 $PD\leqslant 2$,直线 PC 与平面 DEF 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$,求平面 DEF 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，上顶点为 M，左焦点为 F，原点 O 到直线 MF 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)动直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，且 $MA\perp MB$，试求当点 F 到直线 l 的距离最大时直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^{x-1}$，$g(x)=\ln x+x+1$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调区间；

(2)若关于 x 的不等式 $ef(x)-g(x)\geq\frac{a-1}{2}x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（选修 4－4，坐标系与参数方程）（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(5-3\cos 2\theta)=8$.

(1)求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程；

(2)点 P 为曲线 C 上的任意一点，求点 P 到直线 l 的距离的最大值及此时点 P 的坐标.

23.（选修 4－5，不等式选讲）（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=|x-5|+\left|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\right|$.

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geq 4$ 的解集；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)+\left|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\right|\geq a^2-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2023届高三3月大联考

理数参考答案及评分细则

一、选择题

1. B 【解析】由题意可知，$z(i-1)=2i$，$z=\frac{2i}{i-1}=\frac{2i(1+i)}{(i-1)(i+1)}=1-i$，∴$z$的共轭复数$\bar{z}=1+i$，∴$z$的共轭复数的虚部为1．故选B.

2. B 【解析】因为$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|y=\sqrt{2-x}\}=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$或$x>3\}$，∴$\complement_U B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，$A\cap\complement_U B=\{x|1<x\leqslant 2\}$．故选B.

3. B 【解析】由题可得，二项式$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{a}{x}\right)^7$的展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_7^r(\sqrt[3]{x})^{7-r}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^r=C_7^r\cdot a^r\cdot x^{\frac{7-4r}{3}}$ $(r=0,1,2,\cdots,7)$，令$\frac{7-4r}{3}=1$，解得$r=1$，展开式中含x项的系数为$C_7^1\cdot a=35$，∴$a=5$．故选B.

4. A 【解析】因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-2x+2=0$，得$x=1$，因为$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，所以有$-y=-\frac{1}{2}$，得$y=\frac{1}{2}$，故$x+y=\frac{3}{2}$．故选A.

5. C 【解析】函数$g(x)=[\lambda f(x)+3]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+1$在区间$(e^{-1},e)$上有两个零点，即$[\lambda f(x)+3]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$在区间$(e^{-1},e)$上有两个不相等的实数根，因为$f(x)=\ln x$，代入$[\lambda f(x)+3]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$，整理可得$(3+\lambda\ln x)\cdot\ln\frac{1}{x}+1=-\lambda(\ln x)^2-3\ln x+1=0$，即$\lambda(\ln x)^2+3\ln x-1=0$．令$t=\ln x$，因为该函数为增函数，$x\in(e^{-1},e)$，所以$t\in(-1,1)$，令$h(t)=\lambda t^2+3t-1$，则问题转化为函数$h(t)$在$(-1,1)$上有两个零点即可，列式为：

$$\begin{cases}\Delta=9+4\lambda>0\\ h(-1)=\lambda-4>0\\ h(1)=\lambda+2>0\\ -1<-\frac{3}{2\lambda}<1\end{cases}$$

，解得$\lambda>4$．故选C.

6. B 【解析】因为正三棱柱顶房上顶点A_1、B_1、C_1分别在正三棱锥$P-ABC$的侧棱上，所以三棱锥$P-A_1B_1C_1$为正三棱锥，设其高为h_1，则$A_1A_2=10-h_1$，设$A_1B_1=x(0<x<5)$，则$C_1B_1=C_1A_1=x$，所以$\frac{x}{5}=\frac{h_1}{10}$，故$h_1=2x$，则$A_1A_2=10-h_1=10-2x$，故三棱柱的体积为$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(10-2x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(10x^2-2x^3)$，求导可得$V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(20x-6x^2)=0$，∴$x=0$（舍去）或$x=\frac{10}{3}$，当$x\in\left(0,\frac{10}{3}\right)$时，$V'(x)>0$，$V(x)$单调递增；当$x\in\left(\frac{10}{3},5\right)$时，$V'(x)<0$，$V(x)$单调递减．所以当$x=\frac{10}{3}$时，内接三棱柱的体积取得最大值，$V(x)_{\max}=\frac{250\sqrt{3}}{27}m^3$．故选B.

7. B 【解析】被2除余1，且被3除余2的正整数按照从小到大的顺序排列，构成首项为5，公差为$3\times2=6$的等差数列，则$a_n=5+6(n-1)=6n-1$，从而

$\frac{6n^2+27}{a_n+1}=\frac{6n^2+27}{6n}=n+\frac{9}{2n}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}$，当且仅当 $2n^2=9$，$n=\sqrt{\frac{9}{2}}$ 时，等号成立，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，经验证当 $n=2$ 时比 $n=3$ 时数值要小. 故选 B.

8. D 【解析】因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率等于焦距，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=2c$，∴ $a=\frac{1}{2}$，因为焦点到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∵ $a^2+b^2=c^2=1$，∴ $c=1$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，因为圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 的圆心坐标为 $O_1(1,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，易求圆心 $O_1(1,0)$ 到 C 的其中一条渐近线 $y=\sqrt{3}x$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故根据勾股定理，可求直线 $y=\sqrt{3}x$ 被圆截得的弦长为 $2\times\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$. 故选 D.

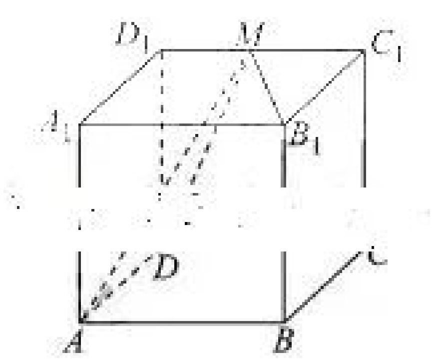
9. A 【解析】∵ $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$ ①，∴ $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，解得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，又 ∵ $0<\alpha<\frac{3}{4}\pi$，∴ $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，故 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，从而有 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$，由于 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1}{25}}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ ②，联立①②得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{7}{25}$，$\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$，因为 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{17\sqrt{2}}{50}$. 故选 A.

10. D 【解析】因为 C 的准线方程是 $x=-1$，故有：$-\frac{p}{2}=-1$，∴ $p=2$，故抛物线 $C:y^2=4x$，因为 A、B 两点关于直线 $x+y-5=0$ 对称，所以直线 l_{AB} 的斜率为 1，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 l_{AB} 的方程为 $y=x+m$，联立：$\begin{cases}y=x+m\\y^2=4x\end{cases}$，整理得：$x^2+(2m-4)x+m^2=0$，根据韦达定理有：$\begin{cases}x_1+x_2=4-2m\\x_1x_2=m^2\\\Delta=(2m-4)^2-4m^2>0\end{cases}$，由 $\Delta=(2m-4)^2-4m^2>0$，得 $m<1$，且 $y_1+y_2=x_1+x_2+2m=4$，即 AB 的中点坐标为 $(2-m,2)$，因为 A、B 两点关于 $x+y-5=0$ 对称，所以点 $(2-m,2)$ 一定在直线 $x+y-5=0$ 上，于是 $2-m+2-5=0$，解得：$m=-1$，满足 $m<1$，故直线 AB 所在的直线方程为 $y=x-1$，即 D 正确. 故选 D.

11. A 【解析】由图象可知：$A=\sqrt{2}$，最小正周期 $T=4\times\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$，∴ $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，∴ $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\sqrt{2}$，∴ $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2n\pi\,(n\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2n\pi\,(n\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{4}$，∴ $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，若将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{7\pi}{24}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$，故函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $-\frac{\pi}{2}+2n\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{\pi}{12}+n\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，令 $n=$

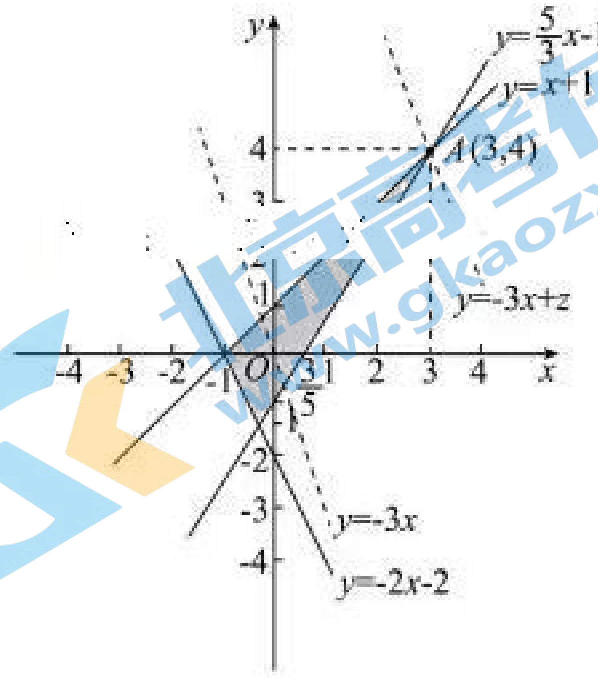
0，得 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$，因为 $g(x)$ 在区间 $[-k,k]$ 上单调递增，所以实数 k 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$. 故选 A.

12. D 【解析】设 $BC=a$，则 $AA_1=AB=2a$，因为 $BC//AD$，$BC\not\subset$ 平面 ADM，$AD\subset$ 平面 ADM，所以 $BC//$ 平面 ADM，故直线 BC 到平面 ADM 的距离为点 B 到平面 ADM 的距离，设点 B 到平面 ADM 的距离为 d，由 $V_{B-ADM}=V_{M-ABD}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle ADM}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times AA_1$，由于 $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{5}a=\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times a\times 2a=a^2$，$d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，代入上式 $a=3$；从而有 $AA_1=AB=6$，$BC=3$，设长方体外接球的半径为 R，则有 $(2R)^2=6^2+6^2+3^2$，所以 $R^2=\frac{81}{4}$，所以该长方体外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=81\pi$. 故选 D.



二、填空题

13. 13 【解析】根据不等式组 $\begin{cases}-x+y-1\leqslant 0\\5x-3y-3\leqslant 0\\2x+y+2\geqslant 0\end{cases}$ 所表示的平面区域，不难确定出当直线 $z=3x+y$ 经过点 $A(3,4)$ 时，z 取得最大值，$z_{\max}=3\times3+4=13$. 故答案为 13.



14. $\{x|2<x<3\}$ 【解析】设 $g(x)=f(x)+1=2^x-\frac{1}{2^x}+2x$，定义域为 $\mathbf{R}$，显然函数 $g(x)$ 为增函数，且 $g(-x)=-g(x)$，故函数 $g(x)$ 为奇函数，不等式 $f(3+x^2)+f(3-5x)<-2\Rightarrow f(3+x^2)+1<-[f(3-5x)+1]$，即 $g(3+x^2)<g(5x-3)$，因为函数 $g(x)$ 为增函数，故有 $x^2+3<5x-3$，即 $x^2-5x+6<0$，解得 $2<x<3$，即不等式的解集为 $\{x|2<x<3\}$，故答案为 $\{x|2<x<3\}$.

15. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】由已知得 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times b\times\frac{7\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=7$，得 $b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，根据余弦定理可得 $c^2+b^2-2bc\cos A=a^2$，$c=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，代入可得 $a=4$. 因为 $b=\frac{5\sqrt{2}}{2}<a=4$，所以 $B<A$，因为 B 为三角形内角，所以 B 必定为锐角，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $B=\frac{\pi}{4}$. 故答案为 $\frac{\pi}{4}$.

16. $\frac{2}{5}$ 【解析】从所有新能源汽车购买者中随机抽取 1 人，抽到货车或小轿车购买者的概率为

$\frac{200+900}{200+900+a}=\frac{1\ 100}{1\ 100+a}=\frac{11}{12}$，解得 $a=100$，由此可知货车与小客车销售量之比为 2∶1，所以货车和小客车的 6 名购买者中，货车有 4 人，小客车有 2 人，则从这 6 人中任取 2 人的所有情况 $C_6^2=15$ 种，这两人都是货车购买者的情况为 $C_4^2=6$ 种，故这两人都是货车购买者的概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

三、解答题

17. 解：(1)数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$a_{n+1}=2+3S_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2+3S_{n-1}$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=3(S_n-S_{n-1})=3a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$.

当 $n=1$ 时，$a_2=2+3S_1=2+3a_1=8$，满足 $\frac{a_2}{a_1}=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，所以 $a_n=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$，故 $a_n=2^{2n-1}$.　　(5 分)

(2)由第(1)问可知 $a_n=2^{2n-1}$，因为 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}n}{\log_2 a_n\log_2 a_{n+1}}$，故有 $b_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

$=(-1)^{n+1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，　　(7 分)

当 n 为偶数时，

$T_n=\frac{1}{4}\times\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\times\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{n}{4n+2}$，

当 n 为奇数时，　　(9 分)

$T_n=\frac{1}{4}\times\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n+1}{4n+2}$，　　(11 分)

综上所述，$T_n=\begin{cases}\frac{n+1}{4n+2}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{n}{4n+2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　(12 分)

18. 解：(1)因为 $\bar{x}=\frac{2+3+5+7+8}{5}=5$，$\bar{y}=\frac{30+40+55+70+80}{5}=55$，

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=210$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=26$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=1700$，所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{210}{\sqrt{44\ 200}}\approx\frac{210}{210.328}\approx 0.999>0.75$，

所以 y 与 x 之间具有很强的相关性.　　(6 分)

(2)根据第(1)问可知：$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=210$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=26$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{210}{26}=\frac{105}{13}$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=55-\frac{105}{13}\times 5=\frac{190}{13}$，　　(9 分)

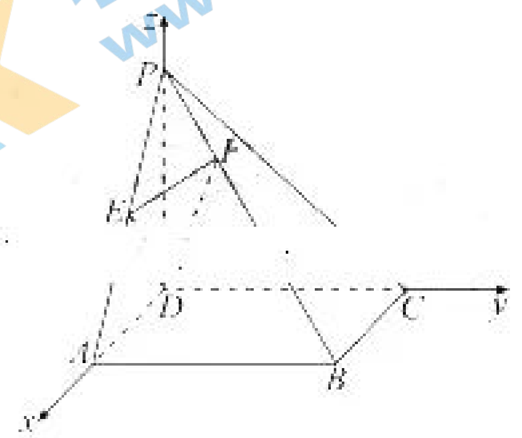
所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\frac{105}{13}x+\frac{190}{13}$.　　(10 分)

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=\frac{105}{13}\times 10+\frac{190}{13}=\frac{1\ 240}{13}\approx 95.38$，

故预测 2022 年 10 月份前来旅游的人数约为 95 万人.　　(12 分)

19. **证明**：(1)因为 $PD\perp$平面 $ABCD$，且 $AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AB$. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，又 $PD\cap AD=D$，故 $AB\perp$平面 PAD. 因为 $DE\subset$平面 PAD，故 $AB\perp DE$. 又因为 $AD=PD$，点 E 是 PA 的中点，所以 $PA\perp DE$. 又 $PA\cap AB=A$，故 $DE\perp$平面 PAB. 因为 $PB\subset$平面 PAB，故 $PB\perp DE$. （5 分）

(2)因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，$ABCD$ 是矩形，所以 DA,DP,DC 两两垂直，所以以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系.



设 $PD=h(h>0)$.

则 $D(0,0,0)$，$P(0,0,h)$，$A(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$B(2,4,0)$.

因为点 E 是 PA 的中点，所以 $E\left(1,0,\dfrac{h}{2}\right)$.

因为 F 为 PB 上一点，且 $FB=2FP$，所以 $F\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2h}{3}\right)$. （7 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 DEF 的法向量，

$\overrightarrow{DE}=\left(1,0,\dfrac{h}{2}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2h}{3}\right)$， （8 分）

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x+\dfrac{h}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{2h}{3}z=0\end{cases}$，令 $z=2$，得 $x=-h$，$y=-\dfrac{h}{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(-h,-\dfrac{h}{2},2\right)$.

因为$\overrightarrow{PC}=(0,4,-h)$，

故有 $|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PC}|\,|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{4\times\left(-\dfrac{h}{2}\right)-2h}{\sqrt{h^2+16}\cdot\sqrt{h^2+\dfrac{h^2}{4}+4}}\right|=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$,

因为 $PD\leqslant 2$，解得 $h=2$，所以平面 DEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-1,2)$. （10 分）

因为平面 PCD 的法向量为$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，

设平面 DEF 与平面 PCD 所成的锐二面角为 θ，则

$\cos\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{DA}|}\right|=\left|\dfrac{-2}{3\times 1}\right|=\dfrac{2}{3}$. 所以平面 DEF 与平面 PCD 所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{2}{3}$.

（12 分）

20. **解**：(1)由题意得 MF：$\dfrac{x}{-c}+\dfrac{y}{b}=1$，即 $bx-cy+bc=0$，原点 O 到线段 MF 的距离 $d=\dfrac{bc}{\sqrt{c^2+b^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{6}$，$b=2$，所以椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$. （4 分）

(2)①当动直线 l 的斜率不存在时，则不可能满足 $MA\perp MB$； （5 分）

②当动直线 l 的斜率 k 存在时，因为 $MA\perp MB$，故直线 l 不可能经过点 $M(0,2)$，故设动直线 l 的方程为 $y=kx+m\,(m\neq 2)$，由$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，消去 y 并化简得 $(2+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$，

$\Delta=36k^2m^2-4(2+3k^2)(3m^2-12)>0$，整理得 $6k^2+4-m^2>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-6km}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{2+3k^2}$，（7 分）

$\overrightarrow{MA}=(x_1,y_1-2)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2,y_2-2)$，

由于 $MA\perp MB$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)=0$，

即 $x_1x_2+(y_1-2)(y_2-2)=0$，$x_1x_2+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=0$，$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)-2(kx_1+m+kx_2+m)+4=0$，

$(1+k^2)x_1x_2+(km-2k)(x_1+x_2)+(m-2)^2=0$，$(1+k^2)\cdot\frac{3m^2-12}{2+3k^2}-(km-2k)\cdot\frac{6km}{2+3k^2}+(m-2)^2=0$，

即 $(1+k^2)(3m^2-12)-(km-2k)\times 6km+(m-2)^2(2+3k^2)=0$，

化简得 $5m^2-8m-4=0$，由于 $m\neq 2$，故 $m=-\frac{2}{5}$，（10 分）

所以直线 AB 的方程为 $y=kx-\frac{2}{5}$，所以直线 AB 过定点 $E\left(0,-\frac{2}{5}\right)$，因为椭圆的左焦点为 $F(-\sqrt{2},0)$，显然，当 $EF\perp l$ 时，点 F 到直线 l 的距离最大，此时，$\because k_{EF}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，$\therefore k_{AB}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，此时直线 l 的方程为 $y=\frac{5\sqrt{2}}{2}x-\frac{2}{5}$，即 $25x-5\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$。（12 分）

21. **解**：(1)因为函数 $f(x)=xe^{x-1}$，$g(x)=\ln x+x+1$，

故 $F(x)=xe^{x-1}-\ln x-x-1$，$x\in(0,+\infty)$，求导可得 $F'(x)=(x+1)e^{x-1}-\frac{(x+1)}{x}=(x+1)\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)$，

令 $m(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，则 $m'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $m(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$m(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

所以 $F(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$。（5 分）

(2)法一：因为不等式 $ef(x)-g(x)\geqslant\frac{a-1}{2}x$，$x\in(0,+\infty)$，等价于 $xe^x-\frac{a+1}{2}x-\ln x-1\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，整理可得 $\frac{a+1}{2}\leqslant\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，令 $h(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$，$x>0$，

则 $h'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，（6 分）

令 $k(x)=x^2e^x+\ln x$，$x>0$，因为 $k'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $k(x)=x^2e^x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $k\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^2e^{\frac{1}{e}}+\ln\frac{1}{e}=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，$k(1)=e>0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，（8 分）

当 $0<x<x_0$ 时，$k(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$k(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

故当 $x=x_0$ 时，$h(x)$ 取得最小值，$h(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$，（9 分）

令 $\varphi(x)=xe^x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

由 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，$x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，

可得 $x_0e^{x_0}=-\frac{1}{x_0}\ln x_0=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

$\ln\frac{1}{x_0}\in(0,1)$，

则 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，即 $\ln x_0=-x_0$，带入 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，得 $x_0e^{x_0}=1$，　　　　(11 分)

则 $h(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\frac{1+x_0-1}{x_0}=1$，故有 $\frac{a+1}{2}\leqslant1$，解得 $a\leqslant1$，故 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

(12 分)

法二：先证 $xe^x\geqslant\ln x+x+1(\forall x>0)$，

事实上可知 $u-\ln u-1\geqslant0$（$u=1$ 时等号成立），

将 $u=xe^x$ 代入上式中得 $xe^x-\ln(xe^x)-1\geqslant0$，

即得 $xe^x-\ln x-\ln e^x-1\geqslant0$，即 $xe^x-\ln x-x-1\geqslant0$ 成立（当 $xe^x=1$ 时等号成立），即 $ef(x)-g(x)\geqslant0$ 成立，

$\therefore$ 当 $a\leqslant1$ 时，$\frac{a-1}{2}x\leqslant0\leqslant ef(x)-g(x)$ 成立，故原式成立.　　　　(8 分)

而 $a>1$ 时，令 x_0 满足 $x_0e^{x_0}=1$，$\ln x_0+x_0=0$，

则 $ef(x_0)-g(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=0$，

而 $\frac{a-1}{2}x_0>0$，原式不成立，由此可知 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.　　　　(12 分)

22. 解：(1)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）中的参数 t 消去，得 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$；

由 $\rho^2(5-3\cos2\theta)=8$，得 $\rho^2[5-3(1-2\sin^2\theta)]=8$，

整理得 $\rho^2+3(\rho\sin\theta)^2=4$，

又 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，所以 C 的直角坐标方程为 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　　　(4 分)

(2)因为点 P 为曲线 C 上任意一点，设点 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，直线 l 方程：$x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$，

根据点到直线的距离公式可得：

$$d=\left|\frac{2\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta-2\sqrt{3}}{2}\right|$$

$=\left|\frac{\sqrt{7}\sin(\theta-\varphi)-2\sqrt{3}}{2}\right|$，（其中 $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$），当 $\sin(\theta-\varphi)=-1$，即 $\theta-\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\left|\frac{\sqrt{7}\sin(\theta-\varphi)-2\sqrt{3}}{2}\right|$ 取最大值 $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{2}$，此时

$2\cos\theta=2\cos(2k\pi-\frac{\pi}{2}+\varphi)=2\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$，

$\sin\theta=\sin(2k\pi-\frac{\pi}{2}+\varphi)=-\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $P\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$，

综上 $P\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$ 到直线 l：$x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 的距离最大，最大值为 $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{2}$.　　　　(10 分)

23. 解：(1) 因为 $f(x)=|x-5|+\left|\frac{1}{2}x+1\right|=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+4,x\leqslant-2\\ 6-\frac{1}{2}x,-2<x<5,\\ \frac{3}{2}x-4,x\geqslant5\end{cases}$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。