顺义区 2022—2023 学年度第二学期期末质量监测

高二数学试卷

考生须知	1. 本试卷总分 150 分，考试用时 120 分钟。 2. 本试卷共 5 页，分为选择题(40 分)和非选择题(110 分)两个部分。 3. 试卷所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。 4. 考试结束后，请将答题卡交回，试卷自己保留。

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

(1) 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$，$B=\{x|-2\leqslant x<2\}$，则 $A\cap B=$

(A) $[-2,1)$　(B) $[-2,4)$　(C) $[1,2)$　(D) $[-2,1]$

(2) 命题"$\forall x\in R, x+|x|\geqslant 0$"的否定是

(A) $\forall x\in R, x+|x|<0$　(B) $\exists x\in R, x+|x|<0$

(C) $\forall x\in R, x+|x|\leqslant 0$　(D) $\exists x\in R, x+|x|\geqslant 0$

(3) "$x>1$"是"$x^2>1$"的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

(4) 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_1=3$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{6}{5}$，则 $a_1\cdot a_5$

(A) $\frac{5}{2}$　( )5　(C) 9　(D) 15

(5) 某班一天上午有 4 节课，下午有 2 节课.现要安排该班一天中语文、数学、政治、英语、体育、艺术 6 堂课的课程表，要求数学课排在上午，体育课排在下午，不同排法种数有

(A) 48 种　(B) 96 种　(C) 144 种　(D) 192 种

(6) 下列给出四个求导的运算：① $\left(x-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1+x^2}{x^2}$；② $(\ln(2x-1))'=\frac{2}{2x-1}$；③ $(x^2e^x)'=2xe^x$；

④ $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$.

其中运算结果正确的个数是

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

(7)在 5 道试题中有 3 道代数题和 2 道几何题,每次从中随机抽出 1 道题,抽出的题不再放回.在第 1 次抽到代数题的条件下,第 2 次抽到几何题的概率是

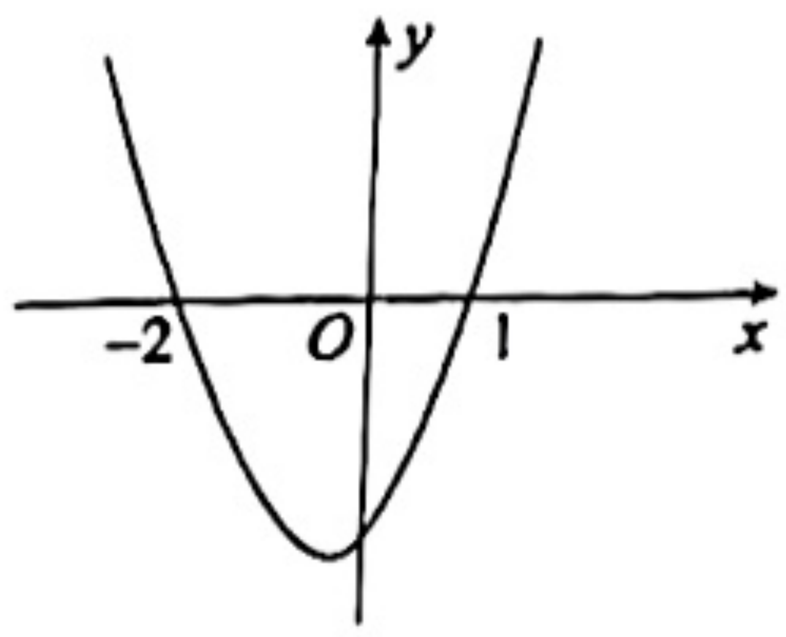
(A)$\frac{1}{2}$　　(B)$\frac{3}{5}$　　(C)$\frac{3}{10}$　　(D)$\frac{3}{4}$

(8)已知$\{a_n\}$为等比数列,下面结论中正确的是

(A)若 $a_2=a_4$,则 $a_2=a_3$　　(B)若 $a_3>a_1$,则 $a_4>a_2$

(C)$\frac{a_2+a_4}{2}\geqslant a_3$　　(D)$\frac{a_2^2+a_4^2}{2}\geqslant a_3^2$

(9)设函数$f(x)$在 R 上可导,其导函数为$f'(x)$,且函数 $y=(x+2)f'(x)$的图象如图所示,则下列结论中一定成立的是



(A)当 $x=-2$ 时,函数$f(x)$取得极大值

(B)当 $x=-2$ 时,函数$f(x)$取得极小值

(C)当 $x=1$ 时,函数$f(x)$取得极大值

(D)当 $x=1$ 时,函数$f(x)$取得极小值

(10)某银行在 1998 年给出的大额存款的年利率为 5%,某人存入 a_0 元(大额存款),按照复利,10 年后得到的本利和为 a_{10},下列各数中与$\frac{a_{10}}{a_0}$最接近的是:

(A)1.5　　(B)1.6　　(C)1.7　　(D)1.8

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

(11)计算:$\log_2 1+\log_3 9=$________.(用数字作答)

(12)函数$f(x)=\frac{\lg(x-1)}{x-2}$的定义域是________.

(13)在二项式$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中,常数项是________.(用数字作答)

(14)若幂函数$f(x)=x^m$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,$g(x)=x^n$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,则使$y=f(x)+g(x)$是奇函数的一组整数 m,n 的值依次是________.

(15) 已知 $k\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-kx, & x\geq 0, \\ kx^2-x+1, & x<0. \end{cases}$

给出下列四个结论：

① 当 $k=1$，函数 $f(x)$ 无零点；

② 当 $k<0$ 时，函数 $f(x)$ 恰有一个零点；

③ 存在实数 k，使得函数 $f(x)$ 有两个零点；

④ 存在实数 k，使得函数 $f(x)$ 有三个零点.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程.

(16)（本题 13 分）

已知 $(1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$.

（Ⅰ）求 a_0；

（Ⅱ）求 $a_1+a_3+a_5$.

(17)（本题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+4$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值与最小值.

(18)(本题 15 分)

A,B 两组各有 7 位病人,他们服用某种药物后的康复时间(单位:天)记录如下:

A 组:10,11,12,13,14,15,16

B 组:12,13,14,15,16,17,20

假设所有病人的康复时间互相独立,从 A,B 两组随机各选 1 人,A 组选出的人记为甲,B 组选出的人记为乙.

(Ⅰ) 求甲的康复时间不多于 14 天的概率;

(Ⅱ)若康复时间大于 14 天,则认为康复效果不佳. 设 X 表示甲、乙 2 人中的康复效果不佳的人数,求 X 的分布列及数学期望;

(Ⅲ) A 组病人康复时间的方差为 $D(A)$,B 组病人康复时间的方差为 $D(B)$,试判断 $D(A)$ 与 $D(B)$ 的大小.(结论不要求证明)

(19)(本题 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,S_n 为其前 n 项和.若 $a_1=\frac{1}{2}$,$S_2=a_3$,设 $b_n=4^{a_n}$.

(Ⅰ)求证:数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(Ⅱ)设 $c_n=a_n+b_n$,求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n

(20)(本题 15 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$g(x)=x-\ln x$.

(Ⅰ)若对任意 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant a$ 成立，求实数 a 的最大值；

(Ⅱ)若 $x\in(1,+\infty)$，求证：$f(x)<g(x)$；

(Ⅲ)若存在 $x_1>x_2$，使得 $g(x_1)=g(x_2)$ 成立，求证：$x_1\cdot x_2<1$.

(21)(本题 15 分)

已知整数数列 $\{a_n\}$ 满足：① $a_1\geqslant 3$；② $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1, & a_n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \end{cases}$，$n=1,2,3,\cdots$.

(Ⅰ)若 $a_4=1$，求 a_1；

(Ⅱ)求证：数列 $\{a_n\}$ 中总包含无穷多等于 1 的项；

(Ⅲ)若 a_m 为 $\{a_n\}$ 中第一个等于 1 的项，求证：$1+\log_2 a_1\leqslant m<2+2\log_2 a_1$.

顺义区 2022—2023 学年度第二学期期末质量监测

高二（数学）参考答案

一、选择题

CBABD，CADDB

二、填空题共 5 道小题，每题 5 分，共 25 分

（11）2　　（非数字作答的不得分）

（12）$(1,2)\cup(2,+\infty)$　　（非集合形式不得分）

（13）20　　（非数字作答的不得分）

（14）$-3,3$　　（有错不得分）

（15）①②③（有错不得分，选对 1 个三分，选对 2 个四分）

三、解答题共 6 道题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本题 13 分）

解：（I）$\because (1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_5x^5$

$\therefore$ 令 $x=0$，可得 $a_0=1$　　…………4 分

（II）令 $x=1$，可得 $3^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ ——①　　…………6 分

令 $x=-1$，可得 $-1=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$ ——②　　…………8 分

①式减②式可得，$2(a_1+a_3+a_5)=3^5+1=244$　　…………10 分

$\therefore a_1+a_3+a_5=122$　　…………13 分

（17）（本题 14 分）

解：（I）$\because$ 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$

$\therefore f(1)=\frac{1}{3}$　　…………2 分

又 $\because f'(x)=x^2-4$、

$\therefore f'(1)=-3$　　…………4 分

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$y-\frac{1}{3}=-3(x-1)$ 即 $3x+y-\frac{10}{3}=0$　　…………6 分

（II）$\because f'(x)=x^2-4$ …………8 分

$\therefore$ 令 $f'(x)>0$ 解得 $x>2$ 或 $x<-2$ …………10 分

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如表所示：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	$\frac{28}{3}$	单调递减	$-\frac{4}{3}$	单调递增

又 $\because x=0$ 时，$f(0)=4$，$x=3$ 时，$f(3)=1$

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值为 $f(0)=4$； …………12 分

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最小值为 $f(2)=-\frac{4}{3}$. …………14 分

（18）（本题 15 分）

解：（I）设甲的康复时间不多于 14 天为事件 C, …………2 分

$\because$ A 组中的数据共有 7 个，$\therefore$ 基本事件共有 7 种，且相互独立

又 $\because$ A 组中的数据不多于 14 天的有 5 个，即事件 C 中包含的基本事件有 5 个

$\therefore$ 甲的康复时间不多于 14 天的概率 $P(C)=\frac{5}{7}$ …………4 分

（II）甲康复效果不佳的概率 $P(\text{甲})=\frac{2}{7}$，

乙康复效果不佳的概率 $P(\text{乙})=\frac{4}{7}$ …………6 分

$\because X$ 表示甲、乙 2 人中的康复效果不佳的人数

$\therefore X$ 的可能取值是 0,1,2 …………7 分

$X=0$ 表示甲、乙 2 人中的康复效果不佳的人数为 0

$\therefore P(x=0)=(1-P(\text{甲}))(1-P(\text{乙}))=\frac{15}{49}$

$X=1$ 表示甲、乙 2 人中的康复效果不佳的人数为 1

$\therefore P(x=1)=(1-P(\text{甲}))P(\text{乙})+P(\text{甲})(1-P(\text{乙}))=\frac{26}{49}$

$X=2$ 表示甲、乙 2 人中的康复效果不佳的人数为 2

$\therefore P(x=2)=P(\text{甲})P(\text{乙})=\frac{8}{49}$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2

P	$\frac{15}{49}$	$\frac{26}{49}$	$\frac{8}{49}$

…………10 分

$\therefore X$ 的数学期望为 $EX=0\times\frac{15}{49}+1\times\frac{26}{49}+2\times\frac{8}{49}=\frac{6}{7}$ …………12 分

（III）$D(A)<D(B)$ …………15 分

（19）（本题 13 分）

证明：（I）设等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$，公差为 d

$\because S_2=a_3$

$\therefore 2a_1+d=a_1+2d$ …………2 分

$\because a_1=\frac{1}{2}\ \therefore d=\frac{1}{2}$ …………3 分

$\therefore a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$ …………4 分

又 $b_n=4^{a_n}$，则 $b_{n+1}=4^{a_{n+1}}$

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{4^{a_{n+1}}}{4^{a_n}}=4^{a_{n+1}-a_n}=2$ …………6 分

即数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，公比为 2，首项 $b_1=4^{a_1}=2$.

（II）由（I）知数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，公比为 2，首项 $b_1=2$

$\therefore b_n=2^n$ …………8 分

$\because c_n=a_n+b_n=\frac{n}{2}+2^n$ ，$n\in N^*$ …………10 分

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\ldots+\frac{n}{2}+2+2^2+\ldots+2^n$

$=\frac{n(n+1)}{4}+2^{n+1}-2$，$n\in N^*$ …………13 分

（20）（本题 15 分）

解：（I）$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ …………1 分

$\therefore$ 令 $f'(x)>0$ 解得 $x>1$ …………2 分

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 上单增

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 取得极小值，也是最小值 $f(1)=1$ …………3 分

$\because x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\geq a$ 成立，

$\therefore$ 只需 $a\leq 1$ 即可 …………4 分

$\therefore$ 实数 a 的最大值为1. …………5 分

（II）证明：设 $h(x)=f(x)-g(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，$x\in(1,+\infty)$ …………6 分

$\therefore h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1=\frac{2x-1-x^2}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$

$\therefore h(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减 …………8 分

$\therefore h(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x<h(1)=0$

$\therefore h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-g(x)<0$

即 $f(x)<g(x)$. …………10 分

（III）法一：

证明：$\because$ 存在 $x_1>x_2$ 时，使得 $g(x_1)=g(x_2)$ 成立

$\therefore x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$

$\therefore x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2=\ln\frac{x_1}{x_2}$ …………11 分

令 $t=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$，由 $x_1>x_2>0$ 可知 $t>1$

由（II）知 $h(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore h(t)<h(1)$ 即 $2\ln\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<0$

$\therefore 2\ln\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ 即 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$ …………13 分

$\therefore x_1-x_2=\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$，由 $x_1>x_2>0$ 知 $x_1-x_2>0$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}>1$ 即 $\sqrt{x_1\cdot x_2}<1$

$\therefore x_1\cdot x_2<1$ ············15 分

法二：$\because g(x)=x-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$

$\therefore g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，$g'(x)>0\Rightarrow x>1$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ············11 分

$\because$ 存在 $x_1>x_2$ 时，使得 $g(x_1)=g(x_2)$ 成立

$\therefore x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，且 $x_1>1>x_2>0$，$\frac{1}{x_2}>1$

$\therefore g(x_1)-g\left(\frac{1}{x_2}\right)=x_1-\ln x_1-\left(\frac{1}{x_2}-\ln\frac{1}{x_2}\right)=x_2-\ln x_2-\left(\frac{1}{x_2}-\ln\frac{1}{x_2}\right)$

$=x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2$

令 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，$x\in(0,+\infty)$ ············13 分

$\therefore h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$

$\therefore h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增

又 $\because 0<x_2<1$

$\therefore h(x_2)=x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2<h(1)=0$ 即 $g(x_1)-g\left(\frac{1}{x_2}\right)<0$ 即 $g(x_1)<g\left(\frac{1}{x_2}\right)$

$\because x_1,\frac{1}{x_2}\in(1,+\infty)$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

$\therefore x_1<\frac{1}{x_2}$ 即 $x_1\cdot x_2<1$ ············15 分

（21）（本题 15 分）

解：（I）$\because a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, a_n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_n}{2}, \quad a_n\text{为偶数}\end{cases}, n=1,2,3,\cdots$

$\therefore$ 若 $a_4=1$，则 $a_3=2$ 或 0 ············1 分

若 $a_3=0$，则 $a_2\in\{0,-1\}$，此时不满足 $a_1\geq 3$

$\therefore a_3=2$，此时 $a_2\in\{1,4\}$ ············2 分

当 $a_2=1$ 时，$a_1\in\{0,2\}$ 不满足 $a_1\geq 3$

$\therefore a_2=4$，故 $a_1=3$ 或 $a_1=8$ ············4 分

（II）证明：方法一：最小数原理

首先 $a_n>0,\forall n\in N^*$.

否则，记 $a_m(m\geq 2)$ 为 $\{a_n\}$ 中第一个小于等于 0 的项，则 $a_{m-1}=2a_m$ 或 a_m-1，

从而 $a_{m-1}\leq 0$，与 m 的最小性矛盾.

记 t 为 $\{a_n\}$ 的最小值，则 t 为奇数并且 $\dfrac{t+1}{2}\in\{a_n\}$.

根据 t 的最小性，可知 $t\leq\dfrac{t+1}{2}\Leftrightarrow t\leq 1$.

根据 $a_n>0,\forall n\in N^*$ 可知 $t=1$.

注意到第一个 1 后面的项为 2, 1, 2, 1, 2…周期性出现，

从而数列 $\{a_n\}$ 中总包含无穷多等于 1 的项； ············9 分

方法二：无穷递降法

首先 $a_n>0,\forall n\in N^*$. 否则，

记 $a_m(m\geq 2)$ 为 $\{a_n\}$ 中第一个小于等于 0 的项，则 $a_{m-1}=2a_m$ 或 a_m-1，

从而 $a_{m-1}\leq 0$，与 m 的最小性矛盾.

断言：存在 $a_m\leq 2(m\geq 2)$.

若否 $a_n\geq 3,\forall n\in N^*$，注意到根据 $a_{k+2}\in\left\{\dfrac{a_k}{2}+1,\dfrac{a_k}{4},\dfrac{a_k+1}{2}\right\}$ 可知 $a_{k+2}\leq\dfrac{a_k}{2}+1$，

所以 $a_{k+2}-a_k\leq 1-\dfrac{a_k}{2}<0\Rightarrow a_{k+2}-a_k\leq -1$，而 $a_{2k+1}\leq a_1-k$，当 $k>a_1$ 时 $a_{2k+1}<0$，矛盾.