北京市第三十五中学 2020-2021 年度第一学期 期中试卷

高三数学 2021.11

行政班__________教学班________姓名________学号_______

一．选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分．每小题只有一个正确选项，请选择正确答案填在机读卡相应的题号处）

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-2\le 0\}$，集合 B 为整数集，则 $A\bigcap B=$（　）A

A．$\{-1,0,1,2\}$　　B．$\{-2,-1,0,1\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,0\}$

2．下列函数中，在其定义域上既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）C

A．$y=x^2$　　B．$y=x+1$　　C．$y=-\lg|x|$　　D．$y=2^x$

3．下列命题中，正确的是（　）B

A．$1-2i$ 的虚部是 2

B．$|1-2i|=\sqrt{5}$

C．$1-2i$ 的共轭复数是 $-1-2i$

D．$1-2i$ 在复平面内对应的点在第二象限

4．已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，那么 $\sin 2\alpha=$（　）D

A．$\dfrac{12}{25}$　　B．$-\dfrac{12}{25}$　　C．$\dfrac{24}{25}$　　D．$-\dfrac{24}{25}$

5．已知点 $P(6,-8)$ 是角 α 终边上一点，则 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$（　）C

A．$-\dfrac{4}{5}$　　B．$\dfrac{4}{5}$　　C．$-\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

6．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的一个焦点是 $(2,0)$，则其渐近线的方程为（ B ）

A．$x\pm\sqrt{3}y=0$　　B．$\sqrt{3}x\pm y=0$

C．$x\pm 3y=0$　　D．$3x\pm y=0$

7．关于函数 $y=\sin x(\sin x+\cos x)$ 描述正确的是（　）D

A．最小正周期是 2π　　B．最大值是 $\sqrt{2}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

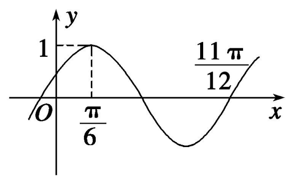
C．一条对称轴是 $x=\dfrac{\pi}{4}$　　　　D．一个对称中心是 $(\dfrac{\pi}{8},\dfrac{1}{2})$

8．设 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“α 是第一象限角”是“$\sin\alpha+\cos\alpha>1$”的　　（ C ）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ （$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后，得到的图象的解析式为（　　）D



A．$y=\sin 2x$　　B．$y=\cos 2x$

C．$y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　D．$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，如果存在函数 $g(x)=kx+b(k,b$ 为常数），使得 $f(x)\geqslant g(x)$ 对一切实数 x 都成立，则称 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个承托函数．现有如下命题：

① 对给定的函数 $f(x)$，其承托函数可能不存在，也可能有无数个；

② $g(x)=2x$ 为函数 $f(x)=2^x$ 的一个承托函数；

③定义域和值域都是 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 不存在承托函数．

其中正确命题的序号是（　　　）

（A）①　　（B）②　　（C）①③　　（D）②③

二．填空题（共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分．请将正确答案填在答题纸相应的题号处）

11．命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2<0$”的否定是____________________．　$\exists x\in\mathbf{R}\ x^2-2\geq 0$

12．能够说明“设 x 是实数．若 $x>1$，则 $x+\dfrac{1}{x-1}>3$”是假命题的一个实数 x 的值为________．2

13．在 ΔABC 中，$a=3$，$b=\sqrt{6}$，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\angle B=$_______．　$\dfrac{\pi}{4}$

14．函数 $f(x)=\left|\sin\dfrac{x}{2}-a\right|$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最大值为 2，则 $a=$____________．　-1或2

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

15. 关于函数 $f\left(x\right)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f\left(x\right)$ 的图象关于原点对称． ② $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是单调递增的．

③ $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称． ④ $f\left(x\right)$ 的最小值为 2．

其中所有真命题的序号是__________． 1, 3

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得5 分，不选或有错选得0分，其他得3 分。

三．解答题（共 6 个小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请将正确答案填在答题纸相应的题号处）

16.（14）已知 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x(x\in\mathbf{R})$.

（I）画出 $y=f(x)$ 在一个周期内的图像

（II）求 $y=f(x)$ 的单调增区间

（III）求 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时函数值域.

$\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$ $[0,2]$

17.（本小题满分 13 分）甲、乙两人进行射击比赛，各射击 4 局，每局射击 10 次，射击命中目标得 1 分，未命中目标得 0 分．两人 4 局的得分情况如下：

甲	6	6	9	9
乙	7	9	x	y

（Ⅰ）若从甲的 4 局比赛中，随机选取 2 局，求这 2 局的得分恰好相等的概率；

（Ⅱ）如果 $x=y=7$，从甲、乙两人的 4 局比赛中随机各选取 1 局，记这 2 局的得分和为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（III）在 4 局比赛中，若甲、乙两人的平均得分相同，且乙的发挥更稳定，写出 x 的所有可能取值.（结论不要求证明）

（Ⅰ）**解**：记 “从甲的 4 局比赛中，随机选取 2 局，且这 2 局的得分恰好相等” 为事件 A，

由题意，得 $P(A)=\dfrac{2}{C_4^2}=\dfrac{1}{3}$，

所以从甲的 4 局比赛中，随机选取 2 局，且这 2 局得分恰好相等的概率为 $\dfrac{1}{3}$．

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（Ⅱ）**解**：由题意，X 的所有可能取值为13，15，16，18，

且 $P(X=13)=\frac{3}{8}$，$P(X=15)=\frac{1}{8}$，$P(X=16)=\frac{3}{8}$，$P(X=18)=\frac{1}{8}$，所以 X 的分布列为：

X	13	15	16	18
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $E(X)=13\times\frac{3}{8}+15\times\frac{1}{8}+16\times\frac{3}{8}+18\times\frac{1}{8}=15$.

（Ⅲ）**解**：x 的可能取值为6，7，8.

18.（14）已知△ABC 同时满足下列四个条件中的三个：

① $A=\frac{\pi}{3}$　　② $\cos B=-\frac{2}{3}$　　③ $a=14$　　④ $b=6$

（Ⅰ）请指出这三个条件，并说明理由；

（Ⅱ）求△ABC 的面积.

解：（Ⅰ）△ABC 同时满足①，③，④.

理由如下：若△ABC 同时满足①，②，则

因为，$\cos B=-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$ 且 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B>\frac{2}{3}\pi$．这与 $A+B>\pi$，矛盾.

所以△ABC 不能同时满足①，②.

所以△ABC 只能同时满足③，④.

因为 $a>b$，所以 $A>B$，故△ABC 不满足②.

故△ABC 满足①，③，④.

（Ⅱ） 因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $14^2=6^2+c^2-2\times6\times c\times\frac{1}{2}$

解得 $c=16$ 或 $c=-10$（舍）.

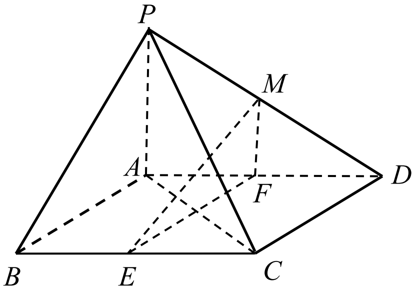
所以△ABC 的面积．$s=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}6\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

19.（本小题满分 14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=135^\circ$，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$\angle BAP=90^\circ$，$AB=AC=PA=2$， E,F 分别为 BC,AD 的中点，点 M 在线段 PD 上.

（Ⅰ）求证： $EF\perp$ 平面 PAC；　（Ⅱ）若 M 为 PD 的中点，求证： $ME//$ 平面 PAB；

（Ⅲ）如果直线 ME 与平面 PBC 所成的角和直线 ME 与平面 $ABCD$ 所成的角相等，求 $\dfrac{PM}{PD}$ 的值.



（Ⅰ）**证明**：在平行四边形 $ABCD$ 中，因为 $AB=AC$，

$\angle BCD=135^\circ$，　所以 $AB\perp AC$.

由 E,F 分别为 BC,AD 的中点，得 $EF//AB$，

所以 $EF\perp AC$.

因为侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，且 $\angle BAP=90^\circ$，　所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$.

又因为 $EF\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp EF$.

又因为 $PA\cap AC=A$， $PA\subset$ 平面 PAC， $AC\subset$ 平面 PAC，　所以 $EF\perp$ 平面 PAC.

（Ⅱ）**证明**：因为 M 为 PD 的中点， F 分别为 AD 的中点，　所以 $MF//PA$，

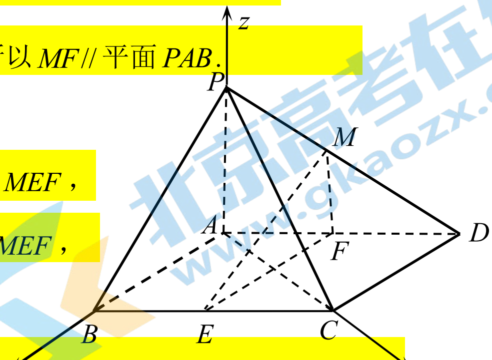
又因为 $MF\not\subset$ 平面 PAB， $PA\subset$ 平面 PAB，　所以 $MF//$ 平面 PAB.

同理，得 $EF//$ 平面 PAB.

又因为 $MF\cap EF=F$， $MF\subset$ 平面 MEF， $EF\subset$ 平面 MEF，

所以平面 $MEF//$ 平面 PAB.　0 又因为 $ME\subset$ 平面 MEF，

所以 $ME//$ 平面 PAB.



（Ⅲ）**解**：因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AC$，所以 $AP,\ AB,\ AC$ 两两垂直，故以 $AB,\ AC,\ AP$ 分别为 x 轴、 y 轴和 z 轴，如上图建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0),\ B(2,0,0),\ C(0,2,0),\ P(0,0,2),\ D(-2,2,0),\ E(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(-2,2,-2)$， $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，

设 $\dfrac{PM}{PD}=\lambda\ (\lambda\in[0,1])$，则 $\overrightarrow{PM}=(-2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

所以 $M(-2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{ME}=(1+2\lambda,1-2\lambda,2\lambda-2)$，

易得平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.　设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$， $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，得 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\2x-2z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

因为直线 ME 与平面 PBC 所成的角和此直线与平面 $ABCD$ 所成的角相等，

所以 $|\cos<\overrightarrow{ME},\boldsymbol{m}>|=|\cos<\overrightarrow{ME},\boldsymbol{n}>|$，即 $\frac{|\overrightarrow{ME}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{ME}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|\overrightarrow{ME}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{ME}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，

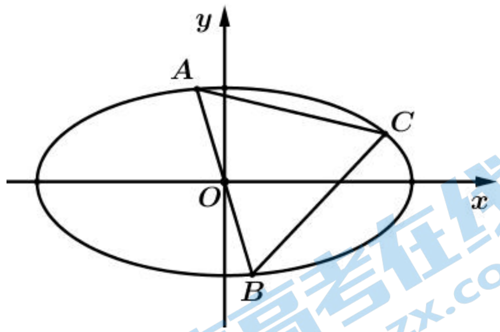
所以 $|2\lambda-2|=|\frac{2\lambda}{\sqrt{3}}|$，

解得 $\lambda=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，或 $\lambda=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$（舍）.

20.（15）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$。

(Ⅰ)若椭圆 E 的焦距为 2，求实数 a 的值；

(Ⅱ)点 A,B,C 位于椭圆 E 上，且 A,B 关于原点对称。若椭圆 E 上存在等边 ΔABC，求 a 的取值范围。



解：

(Ⅰ) $c=1,b=1$，所以 $a=\sqrt{2}$；

(Ⅱ)若 ΔABC 为等边三角形，应有 $|OC|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，

即 $|OC|=\sqrt{3}|OA|$。

若直线 AB 斜率不存在时，即 AB 直线方程为 $x=0$，且 $|OA|=1$。此时 ΔABC 若为等边三角形，点 C 应在长轴顶点，且 $|OC|=\sqrt{3}|OA|=\sqrt{3}$，即 $a=\sqrt{3}$。

若 AB 直线斜率为 0，即 AB 直线方程为 $y=0$，且 $|OA|=a>1$。

此时 ΔABC 若为等边三角形，点 C 应在短轴顶点，此时 $|OC|=1<\sqrt{3}|OA|$，ΔABC 不为等边三角形。

当 AB 直线斜率存在且不为 0 时，设其方程为 $y=kx$，则 OC 直线方程为 $y=-\frac{1}{k}x$。

由 $\begin{cases}x^2+a^2y^2=a^2\\y=kx\end{cases}$，得 $x_A^2=\frac{a^2}{1+a^2k^2}$，$|OA|^2=x_A^2+y_A^2=(1+k^2)x_A^2=\frac{(1+k^2)a^2}{1+a^2k^2}$。

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

同理 $|OC|^2=\dfrac{(1+\frac{1}{k^2})a^2}{1+\frac{a^2}{k^2}}=\dfrac{(1+k^2)a^2}{k^2+a^2}$。

因为 $|OC|=\sqrt{3}|OA|$，所以 $\dfrac{(1+k^2)a^2}{k^2+a^2}=\dfrac{3(1+k^2)a^2}{1+a^2k^2}$，解得 $k^2(a^2-3)=3a^2-1$。

因为 $a>1$，所以 $3a^2-1>0$，若 k^2 有解，只需 $a^2-3>0$，即 $a>\sqrt{3}$。

综上，a 的取值范围是 $[\sqrt{3},+\infty)$。

21.（15）已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{1+x}{e^x}$。

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+b$，求实数 a,b 的值；

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上存在单调增区间，求实数 a 的取值范围；

(Ⅲ)若 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上存在极大值，求实数 a 的取值范围(直接写出结果)。

解：

(Ⅰ)因为 $f'(x)=a-\dfrac{1-(1+x)}{e^x}=\dfrac{x}{e^x}+a$，$f'(0)=a$，切线斜率为 1，

应有 $a=1$，$f(0)=-1=b$，所以 $a=1,b=-1$。

(Ⅱ)因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上存在单调增区间，

所以 $f'(x)=\dfrac{x}{e^x}+a>0$ 在 $(0,2)$ 上有解，即只需 $f'(x)$ 在 $(0,2)$ 上的最大值大于 0 即可。

令 $h(x)=f'(x)=\dfrac{x}{e^x}+a$，$h'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数，

当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数，

所以，当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取最大值 $\dfrac{1}{e}+a$，故只需 $\dfrac{1}{e}+a>0$，即 $a>-\dfrac{1}{e}$。

所以，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上存在单调增区间，实数 a 的取值范围是 $(-\dfrac{1}{e},+\infty)$。

(Ⅲ) $(-\dfrac{1}{e},-\dfrac{2}{e^2})$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。