

2022 北京丰台高一（上）期末

数 学

2022. 01

考 生 须 知	<p>1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。</p> <p>2. 本次练习所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。</p> <p>3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在练习卷、草稿纸上答题无效。</p> <p>4. 本练习卷满分共 150 分，作答时长 120 分钟。</p>
------------------	---

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ ，那么 $f(-1) =$

- (A) -2 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 2

(2) 已知集合 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{1, 2, 4\}$ ，那么集合 A 可能是

- (A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{0, 1, 4\}$ (C) $\{0, 1, 3\}$ (D) $\{1, 3, 4\}$

(3) 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ， $a > b$ ，那么下列结论成立的是

- (A) $a^2 > b^2$ (B) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (C) $ac > bc$ (D) $a - c > b - c$

(4) 下列函数中，图象关于坐标原点对称的是

- (A) $y = \sqrt{x}$ (B) $y = x^3$ (C) $y = |x|$ (D) $y = 2^x$

(5) 下列函数中，最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的是

- (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \cos 2x$ (D) $y = \tan 2x$

(6) 已知 $a > 0$ ，那么 $2 + 3a + \frac{4}{a}$ 的最小值是

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) $2 + 2\sqrt{3}$ (D) $2 + 4\sqrt{3}$

(7) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$ 那么“ $a = 0$ ”是“函数 $f(x)$ 是增函数”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

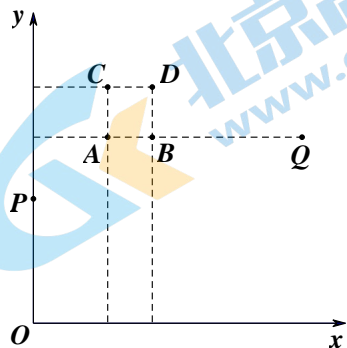
(8) 尽管目前人类还无法准确预报地震, 但科学研究表明, 地震时释放出的能量 E (单位: 焦耳) 与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E = 4.8 + 1.5M$. 已知两次地

震的能量与里氏震级分别为 E_i 与 $M_i (i=1,2)$, 若 $M_2 - M_1 = 2$, 则 $\frac{E_2}{E_1} =$

- (A) 10^3 (B) 3 (C) $\lg 3$ (D) 10^{-3}

(9) 在特定条件下, 篮球赛中进攻球员投球后, 篮球的运行轨迹是开口向下的抛物线的一部分. “盖帽”是一种常见的防守手段, 防守队员在篮球上升阶段将球拦截即为“盖帽”, 而防守队员在篮球下降阶段将球拦截则属“违规”. 对于某次投篮而言, 如果忽略其他因素的影响, 篮球处于上升阶段的水平距离越长, 则被“盖帽”的可能性越大.

收集几次篮球比赛的数据之后, 某球员投篮可以简化为下述数学模型: 如图所示, 该球员的投篮出手点为 P , 篮框中心点为 Q , 他可以选择让篮球在运行途中经过 A, B, C, D 四个点中的某一点并命中 Q , 忽略其他因素的影响, 那么被“盖帽”的可能性最大的线路是



- (A) $P \rightarrow A \rightarrow Q$ (B) $P \rightarrow B \rightarrow Q$
 (C) $P \rightarrow C \rightarrow Q$ (D) $P \rightarrow D \rightarrow Q$

(10) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图象. 若 $x = 0$ 是函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的一个零点, 则 φ 的最小值是

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

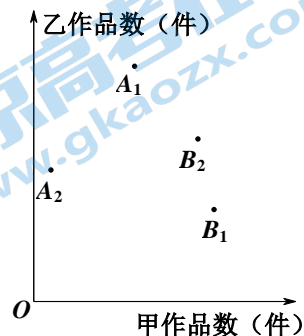
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

- (11) 已知幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象经过点 $(2,8)$, 那么 $\alpha =$ _____.
- (12) 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 x 轴的非负半轴为始边, 它们的终边关于坐标原点对称. 若 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, 则 $\sin \beta =$ _____.
- (13) 已知命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \geq a$ ”是真命题, 那么实数 a 的取值范围是 _____.
- (14) 函数 $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x + 1$ 的最小值是 _____.

(15) 中国剪纸是一种用剪刀或刻刀在纸上剪刻花纹，用于装点生活或配合其他民俗活动的民间艺术。现有两名剪纸艺人创作甲、乙两种作品，他们在一天中的工作情况如图所示，其中点 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名艺人上午创作的甲作品数和乙作品数，点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名艺人下午创作的甲作品数和乙作品数， $i=1,2$ 。给出下列四个结论：

- ① 该天上午第 1 名艺人创作的甲作品数比乙作品数少；
- ② 该天下午第 1 名艺人创作的乙作品数比第 2 名艺人创作的乙作品数少；
- ③ 该天第 1 名艺人创作的作品总数比第 2 名艺人创作的作品总数少；
- ④ 该天第 2 名艺人创作的作品总数比第 1 名艺人创作的作品总数少。

其中所有正确结论的序号是_____。



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知不等式 $x^2 + ax + b < 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的解集 $A = \{x | -1 < x < 2\}$ 。

- (I) 求实数 a, b 的值；
- (II) 若集合 $B = \{x | x < 0\}$ ，求 $A \cap B$ ， $A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B)$ 。

(17) (本小题 14 分)

已知 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ，且 α 是第二象限角。

- (I) 求 $\sin \alpha$ 的值；
- (II) 求 $\frac{\sin(\alpha + 6\pi)\cos(-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)\tan(\alpha - \pi)}$ 的值。

(18) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \lg(1+x) + \lg(1-x)$ 。

- (I) 求函数 $f(x)$ 的定义域；
- (II) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；
- (III) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性，并用定义证明。

(19) (本小题 14 分)

一种专门占据内存的计算机病毒，能在短时间内感染大量文件，使每个文件都不同程度地加长，造成磁盘空间的严重浪费。这种病毒开机时占据内存 2KB，每 3 分钟后病毒所占内存是原来的 2 倍。记 x 分钟后的病毒所占内存为 y KB。

(I) 求 y 关于 x 的函数解析式；

(II) 如果病毒占据内存不超过 1GB(1GB=2¹⁰MB, 1MB=2¹⁰KB)时，计算机能够正常使用，求本次开机计算机能正常使用的时长。

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{4})$, $x \in \mathbb{R}$.

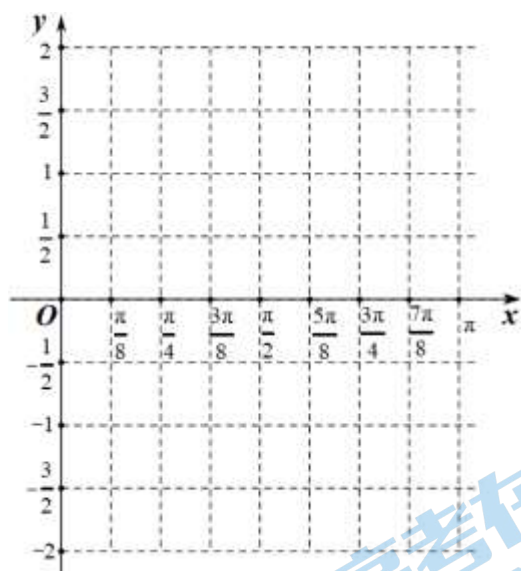
(I) 在用“五点法”作函数 $f(x)$ 的图象时，列表如下：

$2x - \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0		0

在答题卡相应位置完成上述表格，并在坐标系中画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的图象；

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(III) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域。



(21) (本小题 15 分)

已知 n 为正整数, 集合 $M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 对于 M_n 中任意两个元素 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 定义:

$$\alpha - \beta = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|);$$

$$d(\alpha, \beta) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|.$$

(I) 当 $n = 3$ 时, 设 $\alpha = (0, 1, 0), \beta = (1, 0, 0)$, 写出 $\alpha - \beta$, 并计算 $d(\alpha, \beta)$;

(II) 若集合 S 满足 $S \subseteq M_3$, 且 $\forall \alpha, \beta \in S, d(\alpha, \beta) = 2$, 求集合 S 中元素个数的最大值, 写出此时的集合 S , 并证明你的结论;

(III) 若 $\alpha, \beta \in M_n$, 且 $d(\alpha, \beta) = 2$, 任取 $\gamma \in M_n$, 求 $d(\alpha - \gamma, \beta - \gamma)$ 的值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

2022 北京丰台高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	D	B	D	D	A	A	B	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 3 12. $-\frac{1}{4}$ 13. $a \leq 0$ 14. 0

15. ①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. (本小题共 13 分)

解: (I) 因为不等式的解集为 $A = \{x | -1 < x < 2\}$,

所以 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两个实数根.....2 分

则有 $\begin{cases} 1 - a + b = 0, \\ 4 + 2a + b = 0, \end{cases}$ 4 分

解得 $a = -1$, $b = -2$ 6 分

(II) 因为 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x < 0\}$,

所以 $A \cap B = \{x | -1 < x < 0\}$ 8 分

$\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \geq 0\}$,10 分

$A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | x > -1\}$ 13 分

17. (本小题共 14 分)

解: (I) 因为 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

所以 $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$ 4 分

因为 α 是第二象限角,

所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ 6 分

(II) $\frac{\sin(\alpha + 6\pi) \cos(-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \tan(\alpha - \pi)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \tan \alpha} = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ 14 分

18. (本小题共 14 分)

解: (I) 根据题意, 有 $\begin{cases} 1 + x > 0, \\ 1 - x > 0, \end{cases}$ 得 $-1 < x < 1$.

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ 3 分

(II) 函数 $f(x)$ 为偶函数.....4 分

证明: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 关于原点对称,

$$\text{因为 } f(-x) = \lg(1-x) + \lg(1+x) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.....8 分

(III) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.....9 分

证明: $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) - f(x_2) = [\lg(1+x_1) + \lg(1-x_1)] - [\lg(1+x_2) + \lg(1-x_2)]$$

$$= \lg \frac{(1+x_1)(1-x_1)}{(1+x_2)(1-x_2)},$$

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$,

$$\text{所以 } \frac{(1+x_1)(1-x_1)}{(1+x_2)(1-x_2)} > 1.$$

$$\text{所以 } \lg \frac{(1+x_1)(1-x_1)}{(1+x_2)(1-x_2)} > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2).$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.....14 分

19. (本小题共 14 分)

解: (I) 根据题意, 得 $y = 2^{\frac{x+1}{3}}$ ($x \in \mathbf{R}^+$)6 分

(II) 因为病毒占据内存不超过 1GB 时, 计算机能够正常使用,

$$\text{故有 } 2^{\frac{x+1}{3}} \leq 2^{20}, \text{ 解得 } x \leq 57.$$

所以本次开机计算机能正常使用的时长为 57 分钟.....14 分

20. (本小题共 15 分)

解: (I)

$2x - \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

函数图象略.....5 分

(II) 证明: 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$

$$\text{得 } -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间: $\left[-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ 10 分

(III) 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

所以 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

当 $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)_{\min} = -2$;

当 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)_{\max} = \sqrt{2}$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $\left[-2, \sqrt{2}\right]$ 15 分

21. (本小题共 15 分)

解: (I) $\alpha - \beta = (1, 1, 0)$, $d(\alpha, \beta) = 2$ 4 分

(II) 最大值是 4.

此时 $S = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ 或 $S = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

若还有第 5 个元素, 则必有 $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$ 和 $(0, 0, 1), (1, 1, 0)$ 和 $(0, 1, 0), (1, 0, 1)$ 和 $(1, 1, 1), (0, 0, 0)$ 之一出现, 其对应的 $d(\alpha, \beta) = 3$, 不符合题意10 分

(III) 证明: 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n)$,

所以 $a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}$, $|a_i - b_i| \in \{0, 1\}, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$,

从而 $\alpha - \beta = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) \in M_n$,

又 $d(\alpha - \gamma, \beta - \gamma) = \left\| |a_1 - c_1| - |b_1 - c_1| \right\| + \left\| |a_2 - c_2| - |b_2 - c_2| \right\| + \dots + \left\| |a_n - c_n| - |b_n - c_n| \right\|$,

当 $c_i = 0$ 时, $\left\| |a_i - c_i| - |b_i - c_i| \right\| = |a_i - b_i|$;

当 $c_i = 1$ 时, $\left\| |a_i - c_i| - |b_i - c_i| \right\| = |(1 - a_i) - (1 - b_i)| = |a_i - b_i|$.

所以 $d(\alpha - \gamma, \alpha - \beta) = d(\alpha, \beta)$,

所以 $d(\alpha - \gamma, \alpha - \beta) = 2$ 15 分

(若用其他方法解题, 请酌情给分)

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了【2022年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【北京高考资讯】公众号，对话框回复【期末】或者底部栏目<试题下载→期末试题>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

