

2019 北京市石景山区高一（上）期末

数 学

一、选择题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{3, 5\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{3, 7\}$ D. $\{3, 9\}$

2. $\sin 330^\circ$ 的值为()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 下列函数在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减的是()

- A. $y = x^3$ B. $y = \frac{1}{x-1}$ C. $y = \log_2 \frac{1}{x}$ D. $y = -\tan x$

4. 设向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (0, -2)$. 则与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直的向量可以是()

- A. $(3, 2)$ B. $(3, -2)$ C. $(4, 6)$ D. $(4, -6)$

5. 函数 $f(x) = 2^x + 3x$ 的零点所在的一个区间是()

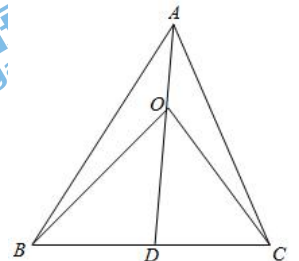
- A. $(-2, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(1, 2)$

6. 已知 $a = \log_2 3^{-1}$, $(\frac{1}{2})^b = 5$, $c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系为()

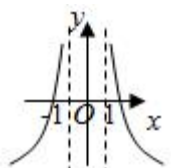
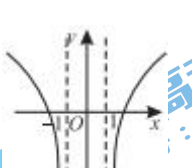
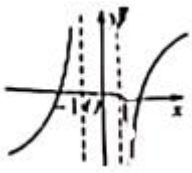

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < b < a$

7. 设 D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中点, 且 O 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点, 则()

- A. $\vec{BO} = -\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ B. $\vec{BO} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$
 C. $\vec{BO} = \frac{5}{6}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AC}$ D. $\vec{BO} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

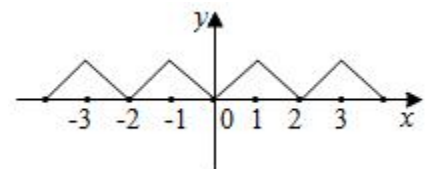


8. 函数 $f(x) = \lg(|x| - 1)$ 的大致图象是()

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

9. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x) = f(2-x)$. 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 则 $f(x)$ ()

- A. 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是增函数
 B. 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是减函数
 C. 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是增函数
 D. 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是减函数



10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期是 π , 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数图象过点 $P(0,1)$, 则函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ()

- A. 有一个对称中心 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ B. 有一条对称轴 $x = \frac{\pi}{6}$
 C. 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递减 D. 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递增

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 16.0 分)

11. 设向量 \vec{a}, \vec{b} 不平行, 向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行, 则实数 $\lambda =$ _____.

12. 化简 $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ x^3, & x < 1 \end{cases}$, 若 $f(x_0) = -1$, 则 $x_0 =$ _____, 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.

14. 已知集合 $M = \{(x,y) | y = f(x)\}$, 若对于任意 $(x_1, y_1) \in M$, 存在 $(x_2, y_2) \in M$, 使得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 成立, 则称集合是“好集合”, 给出下列 4 个集合:

- ① $M = \{(x,y) | y = \frac{1}{x}\}$; ② $M = \{(x,y) | y = e^x - 2\}$; ③ $M = \{(x,y) | y = \cos x\}$; ④ $M = \{(x,y) | y = \ln x\}$. 其中为“好集合”的序号是 _____.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 44.0 分)

15. 已知向量 $\vec{a} = (3,4), \vec{b} = (-1,2)$.

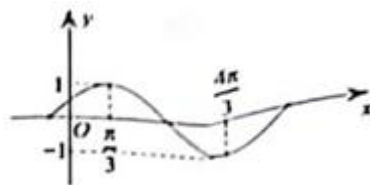
- (1) 求向量 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角的余弦值;
 (2) 若向量 $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行, 求 λ 的值.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α, β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$) 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边分别与单位圆交于 A, B 两点, A, B 两点的纵坐标分别为 $\frac{5}{13}, \frac{3}{5}$.

- (I) 求 $\tan\beta$ 的值;
 (II) 求 $\cos\angle AOB$ 的值.

17. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分象如图所示.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式;



(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值.

18. 已知函数 $f(x) = \log_a(1+x), g(x) = \log_a(1+kx)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

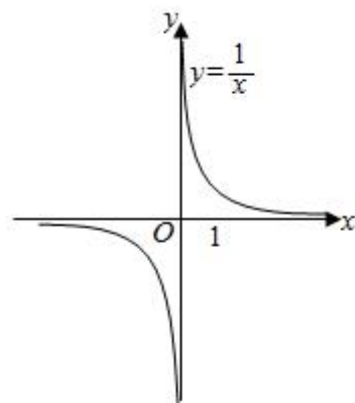
- (I) 当 $k = -2$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的定义域;
 (II) 若函数 $H(x) = f(x) - g(x)$ 是奇函数 (不为常函数), 求实数 k 的值.

19. 阅读下面材料, 尝试类比探究函数 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 的图象, 写出图象特征, 并根据你得到的结论, 尝试猜测作出函数对应的图象.

阅读材料:

我国著名数学家华罗庚先生曾说: 数缺形时少直观, 形少数时难入微, 数形结合百般好, 隔裂分家万事休.

在数学的学习和研究中, 常用函数的图象来研究函数的性质, 也常用函数的解析式



来琢磨函数的图象的特征.我们来看一个应用函数的特征研究对应图象形状的例子.

对于函数 $y = \frac{1}{x}$, 我们可以通过表达式来研究它的图象和性质, 如:

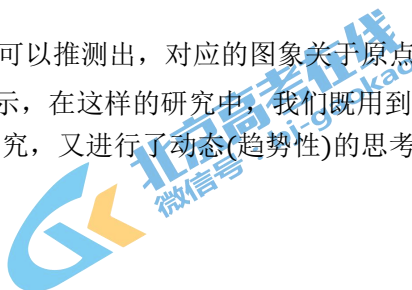
(1) 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 中, 由 $x \neq 0$, 可以推测出, 对应的图象不经过 y 轴, 即图象与 y 轴不相交; 由 $y \neq 0$, 可以推测出, 对应的图象不经过 x 轴, 即图象与 x 轴不相交.

(2) 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 中, 当 $x > 0$ 时 $y > 0$; 当 $x < 0$ 时 $y < 0$, 可以推测出, 对应的图象只能在第一、三象限;

(3) 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 中, 若 $x \in (0, +\infty)$ 则 $y > 0$, 且当 x 逐渐增大时 y 逐渐减小, 可以推测出, 对应的图象越向右越靠近 x 轴; 若 $x \in (-\infty, 0)$, 则 $y < 0$, 且当 x 逐渐减小时 y 逐渐增大, 可以推测出, 对应的图象越向左越靠近 x 轴;

(4) 由函数 $y = \frac{1}{x}$ 可知 $f(-x) = -f(x)$, 即 $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数, 可以推测出, 对应的图象关于原点对称.

结合以上性质, 逐步才想出函数 $y = \frac{1}{x}$ 对应的图象, 如图所示, 在这样的研究中, 我们既用到了从特殊到一般的思想, 又用到了分类讨论的思想, 既进行了静态(特殊点)的研究, 又进行了动态(趋势性)的思考. 让我们享受数学研究的过程, 传播研究数学的成果.



数学试题答案

一、选择题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1.

【答案】D

【解析】解：因为 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{0, 3, 6, 9, 12\} = \{3, 9\}$

故选：D.

直接按照集合的交集的运算法则求解即可.

本题考查交集及其运算，找出集合中的元素，不重复而且是两个集合的公共元素，才是二者的交集. 基础题.

2.

【答案】A

【解析】解： $\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

故选：A.

根据负角化正角、大角化小角的原则，利用诱导公式进行计算

本题考查特殊角的三角函数值，诱导公式的应用. 在利用诱导公式进行计算时，转化口诀：负化正、大化小，化成锐角解决了.

3.

【答案】C

【解析】解：A. $y = x^3$ 在定义域 \mathbb{R} 上单调递增；

B. $y = \frac{1}{x-1}$ 在 $x = 1$ 处无定义， \therefore 该函数在 $(0, +\infty)$ 内单调递减不成立；

C. $t = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减， $y = \log_2 t$ 单调递增；

\therefore 函数 $y = \log_2 \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减，即该选项正确；

D. $y = \tan x$ 在 $(0, \infty)$ 内没有单调性， $\therefore y = -\tan x$ 在 $(0, +\infty)$ 内没有单调性.

故选：C.

根据 $y = x^3$ 的单调性，函数的定义域，反比例函数、对数函数和复合函数的单调性，及正切函数的定义域便可判断每个选项的正误，从而找出正确选项.

考查对函数 $y = x^3$ 单调性的掌握，函数定义域的定义及求法，反比例函数、对数函数单调性，以及复合函数的判断及其单调性的判断，正切函数的定义域.

4.

【答案】A

【解析】解： \because 向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (0, -2)$.

$\therefore \vec{a} + 2\vec{b} = (2, -3)$,

$\therefore (2, -3) \cdot (3, 2) = 6 - 6 = 0$,

\therefore 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直的向量可以是 $(3, 2)$.

故选：A.

求出 $\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -3)$ ，由此利用向量垂直的性质能求出与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直的向量的可能结果.

本题考查向量的坐标运算、向量垂直等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想，是基础题.

5.

【答案】C

【解析】解：函数 $f(x) = 2^x + 3x$ 是连续增函数，

$\therefore f(-1) = \frac{1}{2} - 3 < 0$, $f(0) = 1 + 0 > 0$;

$\therefore f(-1)f(0) < 0$.

所以函数的零点在 $(-1,0)$.

故选: C.

判断函数的连续性, 利用零点判定定理求解即可.

本题考查函数的零点判定定理的应用, 考查计算能力.

6.

【答案】A

【解析】解: $(\frac{1}{2})^b = 5 \Rightarrow b = \log_5 \frac{1}{2} = -\log_5 2 > -\log_5 5 = -1$ 且 $b < 0$;

$0 < c = \log_3 2 < 1$;

$a = -\log_2 3 < -\log_2 2 = -1$,

故 $a < b < c$,

故选: A.

利用指数运算与对数运算的互逆性求出 b , 再根据对数函数的单调性判断 a 、 b 、 c 的范围, 可得答案.

本题借助对数值大小的比较, 考查了对数的性质及对数函数的单调性, 关键是利用对数的单调性求出 a 、 b 、 c 的范围.

7.

【答案】A

【解析】解: $\because D$ 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中点,

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$\because O$ 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点,

$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$\therefore \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -$

$\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

故选: A.

可先画出图形, 根据条件及向量加法、减法和数乘的几何意义即可得出

本题考查向量加法、减法及数乘的几何意义, 向量的数乘运算, 属于基础题

8.

【答案】B

【解析】解: \because 函数 $f(x) = \lg(|x| - 1)$,

$\therefore f(-x) = \lg(|x| - 1) = f(x)$, $f(x)$ 是偶函数,

当 $x = 1$ 或 -1 时, $y < 0$,

故选: B.

利用特殊值法进行判断, 先判断奇偶性;

此题主要考查对数函数的图象及其性质, 是一道基础题;

9.

【答案】B

【解析】解: 由 $f(x) = f(2-x)$ 可知 $f(x)$ 图象关于 $x = 1$ 对称,

又 $\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x) = f(x-2)$

$\therefore f(x)$ 为周期函数且周期为 2, 结合 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数,

可得 $f(x)$ 草图.

故选: B.

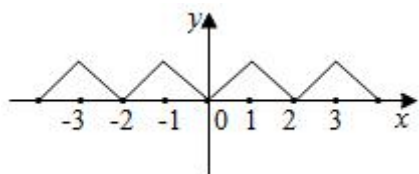
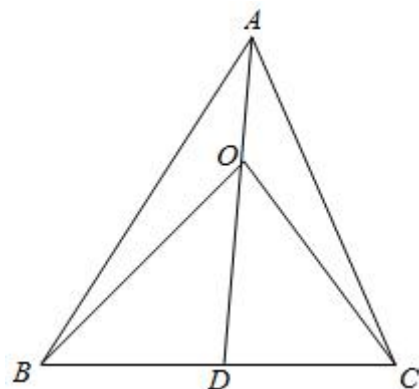
根据函数的性质, 作出函数的草图, 观察图象即可得答案.

本题属于函数性质的综合应用, 解决此类题型要注意:

(1) 明确周期性、对称性、奇偶性的关系.

(2) 培养数形结合的思想方法.

10.



【答案】B

【解析】解：由题意，函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π ，即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ， $\therefore \omega = 2$.

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

$f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，可得： $\sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$ ，此时图象过 $P(0,1)$ ，

$$\text{可得：}\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore 0 < \varphi < \pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}),$$

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 是单调递增，

$$\text{可得：}\frac{-\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$\therefore C$ 选项不对，

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 是单调递增，

$$\text{可得：}\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$\therefore D$ 选项不对，

$$\text{由 } 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi,$$

$$\text{得 } x = \frac{1}{2}k\pi - \frac{\pi}{12}$$

可得对称中心为 $(\frac{1}{2}k\pi - \frac{\pi}{12}, 0)$ ，考查 A 不对，

$$\text{由 } 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{得 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6},$$

可得对称轴方程为 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}$ ，

当 $k = 0$ 时，可得 $x = \frac{\pi}{6}$ ，

$\therefore B$ 选项对.

故选：B.

根据最小正周期是 π ，可得 ω ，通过变换规律后，图象过点 $P(0,1)$ ，求解 φ ，可得函数 $f(x)$ 的解析式，即可判断各选项.

本题主要考查对三角函数的化简能力和三角函数的图象和性质的运用，利用已知条件求出 $f(x)$ 解析式是解决本题的关键.属于中档题.

二、填空题（本大题共 4 小题，共 16.0 分）

11.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】解： \because 向量 \vec{a} ， \vec{b} 不平行，向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行，

$$\therefore \lambda\vec{a} + \vec{b} = t(\vec{a} + 2\vec{b}) = t\vec{a} + 2t\vec{b},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = t \\ 1 = 2t \end{cases} \text{ 解得实数 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

利用向量平行的条件直接求解.

本题考查实数值的解法，考查平面向量平行的条件及应用，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是基础题.

12.

【答案】-1

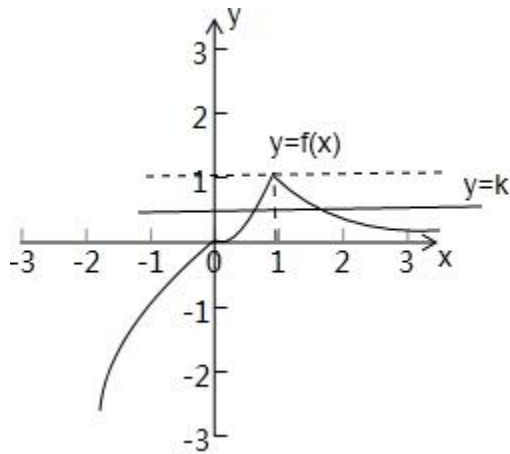
$$\text{【解析】解：}\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha} = -1,$$

故答案为：-1.

由题意利用诱导公式化简三角函数式的值，可得结果.

本题主要考查应用诱导公式化简三角函数式，要特别注意符号的选取，这是解题的易错点，属于基础题。
13.

【答案】 $-1 \quad 0 < k < 1$



【解析】

解：解方程 $f(x_0) = -1$ ，得 $\begin{cases} x_0 \geq 1 \\ \frac{1}{x_0} = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 < 1 \\ x_0^3 = -1 \end{cases}$ 。

解得： $x_0 = -1$ ，

关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同零点等价于 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有两个不同交点，

观察图象可知：当 $0 < k < 1$ 时 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有两个不同交点，

故答案为： $-1 \quad 0 < k < 1$ 。

由分段函数的有关问题分段讨论得：方程 $f(x_0) = -1$ ，得 $\begin{cases} x_0 \geq 1 \\ \frac{1}{x_0} = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 < 1 \\ x_0^3 = -1 \end{cases}$ 。

由方程的根与函数零点问题，关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同零点等价于 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有两个不同交点，观察图象可知：当 $0 < k < 1$ 时 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有两个不同交点，得解
本题考查了分段函数的有关问题及方程的根与函数零点问题，属中档题。

14.

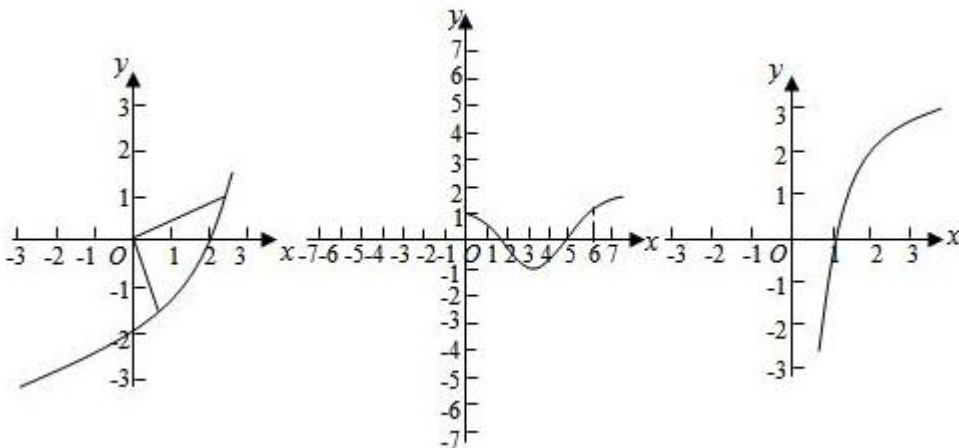
【答案】 ②③

【解析】解：对于①，注意到 $x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} = 0$ 无实数解，因此①不是“好集合”；

对于②，如下左图，注意到过原点任意作一条直线与曲线 $y = e^x - 2$ 相交，过原点与该直线垂直的直线必与曲线 $y = e^x - 2$ 相交，因此②是“好集合”；

对于③，如下中图，注意到过原点任意作一条直线与曲线 $y = \cos x$ 相交，过原点与该直线垂直的直线必与曲线 $y = \cos x$ 相交，因此③是“好集合”；

对于④，如下右图，注意到对于点 $(1,0)$ ，不存在 $(x_2, y_2) \in M$ ，使得 $1 \times x_2 + 0 \times \ln x_2 = 0$ ，因为 $x_2 = 0$ 与真数的限制条件 $x_2 > 0$ 矛盾，因此④不是“好集合”。



故答案为：②③

对于①，利用 $x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} = 0$ 无实数解，判断其正误即可。

对于②，画出函数 $y = e^x - 2$ 图象，利用图象说明函数满足“好集合”的定义，即可判断正误；

对于③，画出函数 $y = \cos x$ 图象，利用图象说明函数满足“好集合”的定义，即可判断正误；

对于④，画出函数 $y = \ln x$ 图象，取一个特殊点即能说明不满足“好集合”定义。

本题考查了命题真假的判断与应用，考查了元素与集合的关系，考查了数形结合的思想，解答的关键是对新定义的理解，是中档题。

三、解答题（本大题共5小题，共44.0分）

15.

【答案】解：向量 $\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ 。

(1) 向量 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角的余弦值 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3+8}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ；

(2) 若向量 $\vec{a} - \lambda\vec{b} = (3 + \lambda, 4 - 2\lambda)$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b} = (1, 8)$ 平行，
则 $8(3 + \lambda) = 4 - 2\lambda$ ，解得 $\lambda = -2$ 。

【解析】(1) 利用平面向量的数量积公式求出夹角的余弦值；

(2) 根据向量平行的坐标关系得到 λ 的方程，求值。

本题考查了平面向量数量积公式的运用以及向量平行的坐标关系；属于基础题。

16.

【答案】解：(I) 角 α, β 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边分别与单位圆交于 A, B 两点， A, B 两点的纵坐标分别为 $\frac{5}{13}, \frac{3}{5}$ 。

所以： $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ， $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ，

由于： $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，

所以： $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ，

则： $\tan \beta = -\frac{3}{4}$ 。

(II) 由(1)求出 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ， $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ，

由于： $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，

所以： $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ， $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ，

所以： $\cos \angle AOB = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = -\frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{33}{65}$ 。

【解析】(I) 直接利用已知条件求出角的正弦和余弦的值，在利用关系式求出角的正切值。

(II) 利用(I)的条件求出两角的差的余弦。

本题考查的知识要点：三角函数关系式的恒等变换，两角的和与差的正弦和余弦公式的应用，主要考查学生的运算能力和转化能力，属于基础题型。

17.

【答案】解：(I) 由图象知 $A = 1$ ，函数的周期 $T = 2(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 2\pi$ ，

即 $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ ，则 $\omega = 1$ ，

由五点对应法得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ，得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

则函数的解析式为 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 。

(II) $\because 0 \leq x \leq \pi$ ， $\therefore \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ ，

则当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 。

【解析】(I) 根据图象结合五点对应法求出 A, ω 和 φ 的值，即可

(II) 求出当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，角的范围，结合三角函数的最值性，进行求解即可

本题主要考查三角函数的图象和性质，求出函数的解析式以及利用三角函数最值性质是解决本题的关键。

18.

【答案】解：(I)当 $k = -2$ 时，求函数 $h(x) = f(x) + g(x) = \log_a(1+x) + \log_a(1-2x) = \log_a(1+x)(1-2x)$ ，
由 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases}$ ，
解得 $-1 < x < \frac{1}{2}$ ，

故函数 $h(x)$ 的定义域为 $(-1, \frac{1}{2})$ 。

(II)由于函数 $H(x) = f(x) - g(x) = \log_a \frac{1+x}{1+kx}$ 是奇函数，

故有 $f(-x) = -f(x)$ ，

即 $\log_a \frac{1-x}{1-kx} = -\log_a \frac{1+x}{1+kx}$ ，

$\therefore \log_a \frac{1-x}{1-kx} + \log_a \frac{1+x}{1+kx} = \log_a \frac{1-x^2}{1-(kx)^2} = 0$ ，

$\therefore k = \pm 1$ 。

【解析】(I)当 $k = -2$ 时，由函数 $h(x)$ 的定义，可得 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases}$ ，解得 x 的范围，可得函数 $h(x)$ 的定义域。

(II)由于函数 $H(x) = \log_a \frac{1+x}{1+kx}$ 是奇函数，可得 $f(-x) = -f(x)$ ，即 $\log_a \frac{1-x}{1-kx} = -\log_a \frac{1+x}{1+kx}$ ，即 $\log_a \frac{1-x^2}{1-(kx)^2} = 0$ ，
由此求得 k 的值。

本题主要考查对数函数的图象和性质综合应用，求函数的定义域、函数的奇偶性的判断，属于中档题。

19. **【答案】解：**(1)在 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 中， $x \neq 0$ ，可以推测出：对应的图象不经过 y 轴，即与 y 轴不相交，

(2)令 $y = 0$ ，即 $x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$ ，解得 $x = \pm 1$ ，可以推测出，对应的图象与 x 相交，交点坐标为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ ，

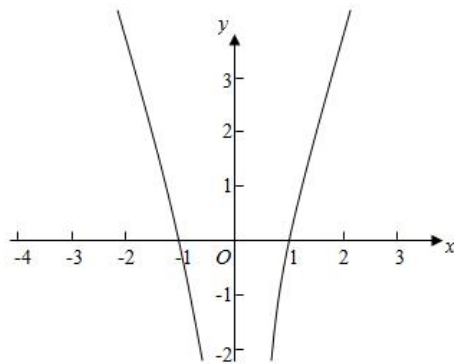
(3)在 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 中，当 $0 < x < 1$ 时， $\frac{1}{x^2} > 1 > x^2$ ，则 $y < 0$ ，当 $x > 1$ 时， $\frac{1}{x^2} < 1 < x^2$ ，则 $y > 0$ ，可以推测出：对应的图象在区间 $(0,1)$ 上图象在 x 轴的下方，在区间 $(1, +\infty)$ 上图象在 x 轴的上方，

(4)在 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 中，若 $x \in (0, +\infty)$ ，则

当 x 逐渐增大时 $\frac{1}{x^2}$ 逐渐减小， $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 逐渐增大，即 y 逐渐增大，所以原函数在 $(0, +\infty)$ 是增函数，

可以推测出：对应的图象越向右逐渐升高，是单调递增的趋势，

(5)由函数 $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 可知 $f(-x) = f(x)$ ，即函数为偶函数，可以推测出：对应的图象关于 y 轴对称



【解析】通过函数的定义域，函数与 x 的交点情况， y 值的变化趋势，函数的奇偶性和函数的单调性，归纳函数的性质即可。

本题考查了类比推理的问题，关键是掌握函数的性质，以及题目所告诉的例子，属于中档题。