高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 i 是虚数单位，则 $\frac{i-12}{3i}=$

A. $-\frac{1}{3}+4i$　　B. $\frac{1}{3}-4i$　　C. $\frac{1}{3}+4i$　　D. $-\frac{1}{3}-4i$

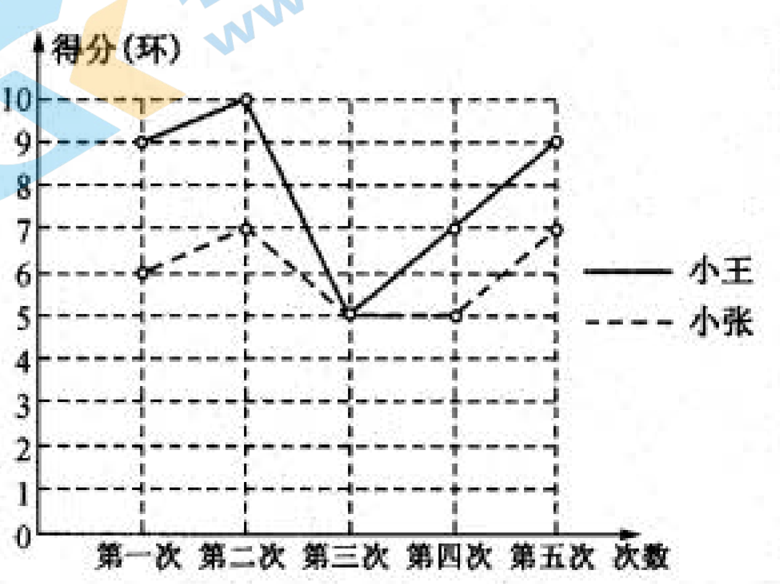
2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|2^x\leqslant 4\}$，$B=\{x|x(3-x)\leqslant 0\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $(3,+\infty)$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)$

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3=1$，$a_{11}=25$，则 $a_7=$

A. 5　　B. -5　　C. ± 5　　D. ± 25

4. 小王与小张二人参加某射击比赛，二人在选拔赛的五次测试的得分情况如图所示. 设小王与小张这五次射击成绩的平均数分别为 $\overline{x_A}$ 和 $\overline{x_B}$，方差分别为 s_A^2 和 s_B^2，则



A. $\overline{x_A}<\overline{x_B}$，$s_A^2>s_B^2$

B. $\overline{x_A}<\overline{x_B}$，$s_A^2<s_B^2$

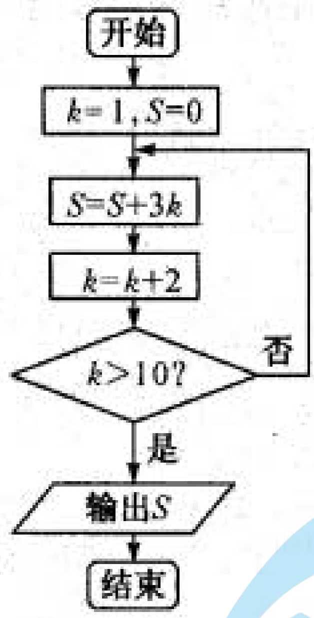
C. $\overline{x_A}>\overline{x_B}$，$s_A^2>s_B^2$

D. $\overline{x_A}>\overline{x_B}$，$s_A^2<s_B^2$

5. 已知直线 l 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点且与 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点关于 y 轴的对称点在直线 $x=-2$ 上，则 $|AB|=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

6. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值是



A. 27　　B. 48　　C. 75　　D. 76

7. 二项式 $\left(2-\frac{x}{a}\right)(1-2x)^4$ 的展开式中 x^3 项的系数是 -70，则实数 a 的值为

A. -2　　B. 2　　C. -4　　D. 4

8. 若 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的内角，则"$\tan A\tan B>1$"是"$\triangle ABC$ 是锐角三角形"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $16\sqrt{2}$，点 P 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 A_1,C 到 P 的距离分别为 $2,2\sqrt{3}$，则直线 CP 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的离心率为 2，F_1,F_2 分别为 C 的左、右焦点，点 A 在 C 的右支上，若 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $10a$，则 $\triangle AF_2F_1$ 的面积是

A. $6\sqrt{15}$　　B. $3\sqrt{15}$　　C. 90　　D. 45

11. 设函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|$，则下列结论错误的是

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$

D. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi\right](k\in \mathbf{Z})$

12. 已知实数 a,b,c,d 满足 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，$ad^2+2bd-b=0$，则 d 的取值范围是

A. $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$　　B. $(-1,1)$

C. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　D. $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,-4)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则实数 $m=$________.

14. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球的体积为 36π，$AA_1=2\sqrt{5}$，则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为________.

15. 已知 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且其图象关于点 $(2,0)$ 对称，若 $f(1)=1$，则 $f(2\,021)=$________.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a^2+c^2-b^2=(4c^2-2bc)\cos A$.

(1)求角 A 的大小；

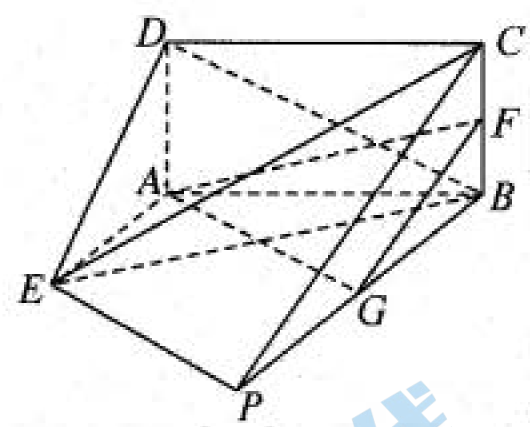
(2)若 $AD\perp BC$，垂足为 D，且 $BC=8$，求 AD 的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，已知矩形 $ABCD$ 所在的平面垂直于直角梯形 $ABPE$ 所在的平面，且 $EP=\sqrt{3}$，$BP=2$，$AD=AE=1$，$AE\perp EP$，$AE/\!/BP$，F，G 分别是 BC，BP 的中点.

(1)求证：平面 $AFG/\!/$平面 PEC；

(2)求二面角 $D-BE-A$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

某市为了增强市民的安全意识，由市安监局组织举办了一次安全知识网络竞赛，竞赛满分为 100 分，得分不低于 85 分的为优秀. 竞赛结束后，从参与者中随机抽取 100 个样本，统计得样本平均数为 76，标准差为 9. 假设该市共有 10 万人参加了此次竞赛活动，且得分 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若以所得样本的平均数和标准差分别作为 μ,σ 的近似值. 微信搜《试卷答案公众号》

(1)试估计该市参加这次竞赛活动得分优秀者的人数是多少万人？

(2)为调动市民参加竞赛的积极性，制定了如下奖励方案：所有参加竞赛活动者，均可参加“抽奖赢电话费”活动，竞赛得分优秀者可抽奖两次，其余参加者抽奖一次. 抽奖者点击抽奖按钮，即随机产生一个两位数(10，11，…，99)，若产生的两位数的数字相同，则可奖励 60 元电话费，否则奖励 15 元电话费. 假设参加竞赛活动的所有人均参加了抽奖活动，估计这次活动奖励的电话费总额为多少万元？

参考数据：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.68$.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 的直线交椭圆 C 于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_1$ 的周长为 8，$|F_1F_2|=2$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设过点 F_1 且不与 x 轴重合的直线 l 与椭圆 C 相交于 E,D 两点，试问在 x 轴上是否存在点 M，使得直线 ME,MD 的斜率之积恒为定值？若存在，求出该定值及点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x(x^2-mx-m^2)$，$g(x)=ax^2+x+ax\ln x$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值，求实数 m 的值；

(2)当 $m=0$ 时，若对任意 $x>0$，不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的值.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1-t,\\ y=2t\end{cases}$（$t$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\sin\theta-3=0$.

(1)求圆 C 的直角坐标方程及直线 l 的普通方程；

(2)直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，与 x 轴交于点 M，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4-5：不等式选讲**

设 $f(x)=|x-2|+|x+3|$.

(1)解不等式 $f(x)>7$；

(2)若关于实数 x 的不等式 $f(x)<|a-1|$ 无解，求实数 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　$\frac{i-12}{3i}=\frac{(i-12)i}{3i^2}=\frac{-1-12i}{-3}=\frac{1}{3}+4i$. 故选 C.

2. B　$A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\leqslant 0$，或 $x\geqslant 3\}$，所以 $A\cup B=\{x|x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 3\}$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|2<x<3\}=(2,3)$. 故选 B.

3. A　方法一：因为 $a_3=1$，$a_{11}=25$，所以 $a_7>0$，且 $a_7^2=a_3a_{11}=25$，所以 $a_7=5$. 故选 A.

方法二：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $\begin{cases}a_1q^2=1,\\a_1q^{10}=25,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\\q^2=\sqrt{5}.\end{cases}$ 所以 $a_7=a_1q^6=\frac{1}{\sqrt{5}}\times(\sqrt{5})^3=5$. 故选 A.

4. C　观察图象可知，实线中的数据除第三次的与虚线中的对应相等外，其余都比虚线中的大，所以这五次射击小王得分的平均数大于小张得分的平均数，即 $\overline{x_A}>\overline{x_B}$；显然实线中的数据波动幅度比虚线中的数据波动幅度大，所以这五次射击小王得分的方差大于小张得分的方差，即 $s_A^2>s_B^2$. 故选 C.

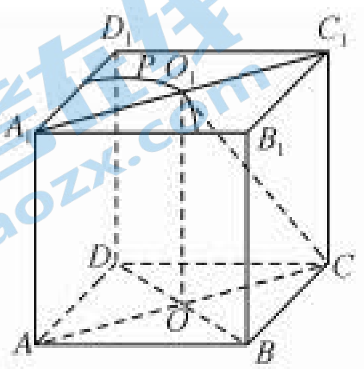
5. D　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为线段 AB 的中点关于 y 轴的对称点在直线 $x=-2$ 上，所以线段 AB 的中点的横坐标为 2，所以 $x_1+x_2=4$，所以 $|AB|=x_1+1+x_2+1=6$. 故选 D.

6. C　第一次运行时，$S=0+3\times1=3$，$k=3$；第二次运行时，$S=3+3\times3=12$，$k=5$；
第三次运行时，$S=12+3\times5=27$，$k=7$；第四次运行时，$S=27+3\times7=48$，$k=9$；
第五次运行时，$S=48+3\times9=75$，$k=11$. 此时刚好满足 $k>10$，故输出 $S=75$. 故选 C.

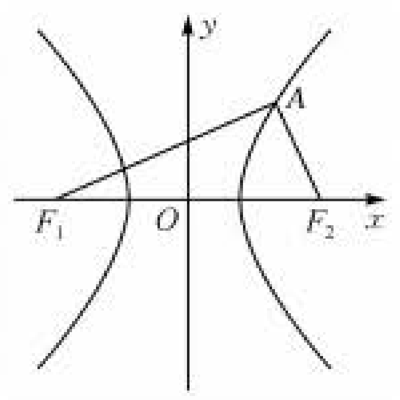
7. D　二项式 $\left(2-\frac{x}{a}\right)(1-2x)^4$ 的展开式中 x^3 项是 $2\cdot C_4^3\cdot1^1\cdot(-2x)^3+\left(-\frac{x}{a}\right)\cdot C_4^2\cdot1^2\cdot(-2x)^2=-64x^3-\frac{24}{a}x^3=-\left(64+\frac{24}{a}\right)x^3$. 由题意知 $-\left(64+\frac{24}{a}\right)=-70$，解得 $a=4$. 故选 D.

8. C　因为 $A,B,C\in(0,\pi)$，且 $\tan A\tan B>1$，所以 $\begin{cases}\tan A>0,\\\tan B>0,\end{cases}$ 所以角 A，B 为锐角. 又 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}>0$，所以角 C 为锐角，所以△ABC 为锐角三角形；若△ABC 为锐角三角形，则角 A，B，C 为锐角，所以 $\begin{cases}\tan A>0,\\\tan B>0,\\\tan C>0.\end{cases}$ 又 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}>0$，所以 $1-\tan A\tan B<0$，所以 $\tan A\tan B>1$，所以"$\tan A\tan B>1$"是"△ABC 是锐角三角形"的充要条件. 故选 C.

9. A　易知 $AB=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=4$，连接 C_1P，由题意知点 P 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的以 A_1 为圆心，2 为半径的圆弧上，设该圆弧与 A_1C_1 的交点为 O_1，则 O_1 为 A_1C_1 的中点，易求 $C_1P=2$，又 $CO_1=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=2\sqrt{3}$，所以点 P 与 O_1 重合，连接 AC 与 BD 交于点 O，易证 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，则 $\angle CO_1O$ 为直线 CP 与平面 BDD_1B_1 所成的角，所以 $\tan\angle CO_1O=\frac{OC}{O_1O}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.



10. B　设 C 的半焦距为 c，由 $\frac{c}{a}=2$，得 $c=2a$，又 $c^2-a^2=9$，所以 $a=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$.
因为△AF_1F_2 的周长为 $10a$，即 $|F_1A|+|F_2A|+|F_1F_2|=10\sqrt{3}$. 又 $|F_1F_2|=2c=4\sqrt{3}$，所以 $|F_1A|+|F_2A|=6\sqrt{3}$①，又 $|F_1A|-|F_2A|=2\sqrt{3}$②，由①②得 $|F_1A|=4\sqrt{3}$，$|F_2A|=2\sqrt{3}$.
所以 $\cos\angle F_2AF_1=\frac{\frac{1}{2}|AF_2|}{|AF_1|}=\frac{\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$，得 $\sin\angle F_2AF_1=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 故△$AF_2F_1$ 的面积是
$S=\frac{1}{2}|F_1A||F_2A|\sin\angle F_2AF_1=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$. 故选 B.



11. D　易求 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数；利用诱导公式可得 $f(\pi-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；$f(x)=|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sqrt{2}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$，令 $t=x+\frac{\pi}{4}$，则 $y=\sqrt{2}(|\sin t|+|\cos t|)$，易证 $y=\sqrt{2}(|\sin t|+|\cos t|)$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $y=\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，所以在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $y_{\min}=\sqrt{2}$，由周期性知在 $\mathbf{R}$ 上 $y_{\min}=\sqrt{2}$；$f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位长度可得 $g(x)=\sqrt{2}(|\sin x|+|\cos x|)$，所以在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，又 $g(x)$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$. 故选 D.

12. D　由题意知 $a\neq0$，因为关于 d 的方程为 $ad^2+2bd-b=0$，所以 $d=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2+4ab}}{2a}$，且 $4b^2+4ab\geqslant0$，因为实数 a，b，c，d 满足 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，所以 $a>0$，$c<0$，若 $b\geqslant0$，则 $a>b=|b|$，若 $b<0$，则 $a=-b-c=|b|-c>|b|$，所以 $a>|b|$，所以 $d=-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}}$，设 $\frac{b}{a}=t$，由 $a>|b|$ 得，$t\in(-1,1)$，则 $d=-t\pm\sqrt{t^2+t}$，且 $t^2+t\geqslant0$，得 $t\geqslant0$，或 $t\leqslant-1$，所以 $t\in[0,1)$，设 $f(t)=-t-\sqrt{t^2+t}$，$t\in[0,1)$，因为 $f'(t)=-1-\frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}<0$ 在 $t\in[0,1)$ 上恒成立，所以函数 $f(t)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，所以对 $\forall t\in[0,1)$，$-1-\sqrt{2}<f(t)\leqslant0$，所以此时 $f(t)$ 在 $t\in[0,1)$ 的值域为 $(-1-\sqrt{2},0]$，即此时 $d\in(-1-\sqrt{2},0]$；设 $g(t)=-t+\sqrt{t^2+t}$，$t\in[0,1)$，因为 $g'(t)=-1+\frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}=-1+\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+t}}=\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}}$

$=\frac{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}}-\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}}>0$ 在 $t\in[0,1)$ 上恒成立，所以函数 $g(t)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，所以对 $\forall t\in[0,1)$，$0\leqslant g(t)<-1+\sqrt{2}$，所以 $g(t)$ 在 $t\in[0,1)$ 的值域为 $[0,-1+\sqrt{2})$，即此时 $d\in[0,-1+\sqrt{2})$，所以 $d\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$。故选 D.

13. -8　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(m,-4)=(2+m,-3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,1)-(m,-4)=(2-m,5)$，因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $(2+m)\times5-(2-m)\times(-3)=0$，解得 $m=-8$.

14. 8　设矩形 $ABCD$ 的两边长分别为 a，b，该长方体为外接球的半径为 r，则 $\frac{4\pi r^3}{3}=36\pi$，解得 $r=3$，所以 $\sqrt{a^2+b^2+(2\sqrt{5})^2}=2\times3$，所以 $a^2+b^2=16$，所以 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}=8$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时等号成立，所以矩形 $ABCD$ 面积的最大值为 8.

15. 1　法一：因为函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $f(4-x)=-f(x)$. 又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $-f(x-4)=-f(x)$，即 $f(x-4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数. 所以 $f(2\,021)=f(4\times505+1)=f(1)=1$.

法二：根据题设，构造函数 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，则 $f(2\,021)=\sin\frac{2\,021\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+1\,010\pi\right)=1$.

16. $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \frac{n}{2}, n\geqslant2.\end{cases}$　因为当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}$，所以当 $n=2$ 时，$a_2=a_1=1$；

当 $n\geqslant3$ 时，$a_{n-1}=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-2}a_{n-2}$，两式相减，得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant3)$，所以 $a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant3)$.

因为 $a_2=1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}(n\geqslant3)$，所以 $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n-2}$，$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\frac{n-2}{n-3}$，…，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}$，累乘，得 $\frac{a_n}{a_2}=\frac{n}{2}(n\geqslant3)$，所以 $a_n=\frac{n}{2}(n\geqslant3)$，显然 $n=2$ 时满足，$n=1$ 不满足，所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\frac{n}{2}$，所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \frac{n}{2}, n\geqslant2.\end{cases}$

17. 解：(1) 根据题意 $a^2+c^2-b^2=(4c^2-2bc)\cos A$，所以 $2ac\cos B=2c(2c-b)\cos A$，

即 $a\cos B=(2c-b)\cos A$，所以 $\sin A\cos B=(2\sin C-\sin B)\cos A$，………… 2 分

所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$，

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A$. ………… 4 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，所以 $\sin C=2\sin C\cos A$

又 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2) 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}bc\sin A$，$BC=8$，$A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $4AD=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，即 $AD=\frac{\sqrt{3}}{16}bc$. ………… 9 分

由余弦定理，得 $64=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc\geqslant2bc-bc=bc$，………… 10 分

即 $bc\leqslant64$（当且仅当 $b=c$ 时等号成立），

所以 $AD=\frac{\sqrt{3}}{16}bc\leqslant\frac{\sqrt{3}}{16}\times64=4\sqrt{3}$（当且仅当 $b=c$ 时等号成立），

故 AD 的最大值为 $4\sqrt{3}$. ………… 12 分

18. (1) 证明：因为 G 是 BP 的中点，所以 $PG=\frac{1}{2}BP=1$.

又因为 $AE=1$，所以 $AE=PG$. ………… 1 分

又因为 $AE/\!/PG$，$AE\perp EP$，所以四边形 $AEPG$ 是矩形.

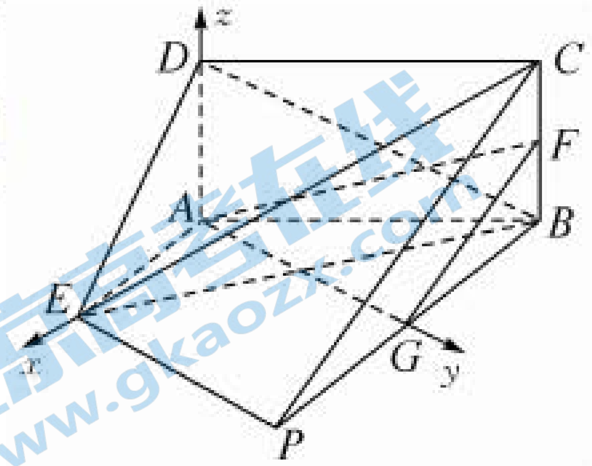
所以 $AG/\!/EP$. …………

又 $AG\not\subset$ 平面 PEC，$PE\subset$ 平面 PEC，所以 $AG//$ 平面 PEC.

因为 F，G 分别是 BC，BP 的中点，所以 FG 是 $\triangle BCP$ 的中位线，所以 $FG//PC$. …………………………… 4 分

又 $FG\not\subset$ 平面 PEC，$PC\subset$ 平面 PEC，所以 $FG//$ 平面 PEC

因为 $AG\cap FG=G$，且 AG，$FG\subset$ 平面 AFG，所以平面 $AFG//$ 平面 PEC. …………………………… 6 分



(2)解：平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABPE$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABPE=AB$，$DA\perp AB$，$DA\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp$ 平面 $ABPE$，又 AE，$AG\subset$ 平面 $ABPE$，所以 $AD\perp AE$，$AD\perp AG$，所以 AE，AG，AD 两两垂直，以 A 为原点，AE，AG，AD 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系(如右图所示). …………………… 7 分

因为 $EP=\sqrt{3}$，$BP=2$，$AD=AE=1$，所以点 $E(1,0,0)$，$D(0,0,1)$，$B(-1,\sqrt{3},0)$，

则 $\overrightarrow{ED}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{EB}=(-2,\sqrt{3},0)$. …………………………… 8 分

设平面 EDB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+z=0,\\ -2x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}z=x,\\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x.\end{cases}$

令 $x=3$，得平面 EDB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,2\sqrt{3},3)$；…………………………… 9 分

易知平面 ABE 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,0,1)$，…………………………… 10 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{(3,2\sqrt{3},3)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{30}\times 1}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

由图知，二面角 $D-BE-A$ 为锐二面角，所以二面角 $D-BE-A$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. …………………………… 12 分

19. 解：(1)由题意知 $X\sim N(76,81)$，所以优秀者得分 $X\geqslant 76+9=\mu+\sigma$，

由 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.68$，得 $P(X\geqslant 85)\approx\dfrac{1-0.68}{2}=0.16$.

所以估计该市参加这次竞赛活动得分优秀者的人数为 $10\times 0.16=1.6$（万人）. …………………………… 4 分

(2)设抽奖一次获得的话费为 Y 元，则 Y 的取值为 60，15，

在 10，11，…，99 共 90 个数中，两位数数字相同的概率为 $\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$，…………………………… 6 分

所以 $P(Y=60)=\dfrac{1}{10}$，$P(Y=15)=\dfrac{9}{10}$，

所以抽奖一次获得电话费的期望值为 $E(Y)=60\times\dfrac{1}{10}+15\times\dfrac{9}{10}=19.5$(元). …………………………… 8 分

设抽奖次数为 Z，则 Z 的取值为 1，2，则

$P(Z=1)=1-0.16=0.84$，$P(Z=2)=0.16$，…………………………… 10 分

所以参加活动的每个人抽奖次数的数学期望为 $E(Z)=1\times 0.84+2\times 0.16=1.16$，

所以这次活动所需电话费估计为 $10\times 1.16\times 19.5=226.2$ 万元. …………………………… 12 分

20. 解：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，由题意，得 $2c=2$，$4a=8$，所以 $c=1$，$a=2$. …………………………… 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$. …………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………… 4 分

(2)由(1)知 $F_1(-1,0)$，设点 $E(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$M(m,0)$.

因为直线 l 不与 x 轴重合，所以设直线 l 的方程为 $x=ny-1$.

联立 $\begin{cases}x=ny-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3n^2+4)y^2-6ny-9=0$，

则 $\Delta=36n^2+36(3n^2+4)>0$，$y_1+y_2=\dfrac{6n}{3n^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3n^2+4}$，…………………………… 6 分

又 $x_1x_2=(ny_1-1)(ny_2-1)=n^2y_1y_2-n(y_1+y_2)+1=-\dfrac{9n^2}{3n^2+4}-\dfrac{6n^2}{3n^2+4}+1=-\dfrac{12n^2-4}{3n^2+4}$，

$x_1+x_2=n(y_1+y_2)-2=\dfrac{6n^2}{3n^2+4}-2=-\dfrac{8}{3n^2+4}$，…………………………… 7 分

直线 ME，MD 的斜率分别为 $k_{ME}=\dfrac{y_1}{x_1-m}$，$k_{MD}=\dfrac{y_2}{x_2-m}$，

则 $k_{ME}\cdot k_{MD}=\dfrac{y_1}{x_1-m}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-m}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-m)(x_2-m)}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2}$

$=\dfrac{\dfrac{-9}{3n^2+4}}{-\dfrac{12n^2-4}{3n^2+4}-m\left(\dfrac{-8}{3n^2+4}\right)+m^2}=\dfrac{-9}{-12n^2+4+8m+3m^2n^2+4m^2}=-\dfrac{9}{(3m^2-12)n^2+4(m+1)^2}$. …………………………… 9 分

要使得直线 ME,MD 的斜率之积恒为定值,只需 $3m^2-12=0$,解得 $m=\pm2$.

当 $m=2$ 时,存在点 $M(2,0)$,使得 $k_{ME}\cdot k_{MD}=-\frac{9}{(3m^2-12)n^2+4(m+1)^2}=-\frac{9}{36}=-\frac{1}{4}$;

当 $m=-2$ 时,存在点 $M(-2,0)$,使得 $k_{ME}\cdot k_{MD}=-\frac{9}{(3m^2-12)n^2+4(m+1)^2}=-\frac{9}{4}$; ………………………… 11 分

综上,在 x 轴上存在点 M,使得直线 ME,MD 的斜率之积恒为定值.

当点 M 的坐标为 $(2,0)$ 时,直线 ME,MD 的斜率之积恒为定值 $-\frac{1}{4}$;

当点 M 的坐标为 $(-2,0)$ 时,直线 ME,MD 的斜率之积恒为定值 $-\frac{9}{4}$. ………………………… 12 分

21. 解:(1) $f'(x)=e^x(x^2-mx-m^2)+e^x(2x-m)=e^x[x^2+(2-m)x-m^2-m]$,

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值,

所以 $f'(1)=e(1+2-m-m^2-m)=0$,即 $m^2+2m-3=0$,解得 $m=-3$ 或 $m=1$. ………………………… 2 分

当 $m=-3$ 时,$f'(x)=e^x(x^2+5x-6)=e^x(x+6)(x-1)$,易知在 $(-6,1)$ 上,$f'(x)<0$,在 $(1,+\infty)$ 上,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值,符合题意; ………………………… 3 分

当 $m=1$ 时,$f'(x)=e^x(x^2+x-2)=e^x(x+2)(x-1)$,易知在 $(-2,1)$ 上,$f'(x)<0$,在 $(1,+\infty)$ 上,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值,符合题意.

所以 $m=-3$ 或 $m=1$. ………………………… 4 分

(2)当 $m=0$,$f(x)=x^2e^x$,$g(x)=ax^2+x+ax\ln x$,

由 $f(x)\geqslant g(x)$,得 $x^2e^x\geqslant ax^2+x+ax\ln x$.

因为 $x>0$,所以 $xe^x\geqslant ax+1+a\ln x=a(x+\ln x)+1$,所以 $e^{x+\ln x}\geqslant a(x+\ln x)+1$. ………………………… 5 分

令 $t=x+\ln x$,则问题转化为对 $\forall t\in\mathbf{R}$,$e^t-at-1\geqslant0$ 恒成立,

令 $h(t)=e^t-at-1$,则 $h'(t)=e^t-a$. ………………………… 6 分

①当 $a\leqslant0$ 时,$h'(t)=e^t-a>0$,所以 $h(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $h(-1)=\frac{1}{e}+a-1<0$,不合题意; ………………………… 7 分

②当 $a>0$ 时,令 $h'(t)=e^t-a=0$,得 $t=\ln a$,

当 $t\in(-\infty,\ln a)$ 时,$h'(t)<0$,当 $t\in(\ln a,+\infty)$ 时,$h'(t)>0$,所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(t)_{\min}=h(\ln a)=a-a\ln a-1$, ………………………… 8 分

所以 $a-a\ln a-1\geqslant0$,所以 $1-\ln a-\frac{1}{a}\geqslant0$,即 $\ln a+\frac{1}{a}-1\leqslant0$. ………………………… 9 分

令 $\mu(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$,则 $\mu'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}$,

所以当 $a\in(0,1)$ 时,$\mu'(a)<0$,当 $a\in(1,+\infty)$ 时,$\mu'(a)>0$,

所以 $\mu(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\mu(a)_{\min}=\mu(1)=0$, ………………………… 11 分

所以对 $\forall a\in(0,+\infty)$,$\mu(a)\geqslant0$,所以当且仅当 $a=1$ 时,$\mu(a)\leqslant0$ 成立,所以 $a=1$. ………………………… 12 分

22. 解:(1)因为 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 所以 $x^2+y^2+2y-3=0$,

即圆 C 的直角坐标为 $x^2+(y+1)^2=4$. ………………………… 3 分

由 $\begin{cases}x=1-t,\\y=2t\end{cases}$ 得 $y=2(1-x)$,得 $2x+y-2=0$,即直线 l 的普通方程为 $2x+y-2=0$. ………………………… 5 分

(2)由题意,得 $M(1,0)$,直线 l 参数方程为 $\begin{cases}x=1-\frac{1}{\sqrt5}u,\\y=\frac{2}{\sqrt5}u\end{cases}$ (u 为参数),代入圆 C 的方程,得 $u^2+\frac{2}{\sqrt5}u-2=0$, ……… 7 分

所以 $\Delta=\frac{4}{5}+8>0$,$u_1+u_2=-\frac{2}{\sqrt5}$,$u_1u_2=-2$. ………………………… 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|u_1|}+\frac{1}{|u_2|}=\frac{|u_1|+|u_2|}{|u_1u_2|}=\frac{|u_1-u_2|}{|u_1u_2|}=\frac{\sqrt{(u_1+u_2)^2-4u_1u_2}}{|u_1u_2|}=\frac{\sqrt{55}}{5}$. ………………………… 10 分

23. 解:(1) $f(x)=\begin{cases}-2x-1,x<-3,\\5,-3\leqslant x\leqslant2,\\2x+1,x>2,\end{cases}$ ………………………… 1 分

当 $x<-3$ 时,不等式可化为 $-2x-1>7$,解得 $x<-4$,所以 $x<-4$; ………………………… 2 分

当 $-3\leqslant x\leqslant2$ 时,不等式可化为 $5>7$,无解; ………………………… 3 分

当 $x>2$ 时,不等式可化为 $2x+1>7$,解得 $x>3$,所以 $x>3$. ………………………… 4 分

综上,不等式 $f(x)>7$ 的解集是 $(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$. ………………………… 5 分

(2)因为 $|x-2|+|x+3|=|2-x|+|x+3|\geqslant|2-x+x+3|=5$, ………………………… 7 分

所以 $(|x-2|+|x+3|)_{\min}=5$. ………………………… 8 分

要使 $|x-2|+|x+3|<a-1$ 无解,只需 $a-1\leqslant5$,解得 $a\leqslant6$.

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,6]$. ………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。