2019~2020 学年度高三年级四月份测试题

数学 B　参考答案　　　　　　2020. 4

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1） A　（2） C　（3） C　（4） A　（5） C

（6） D　（7） B　（8） D　（9） B　（10） D

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）80　（12）3， 4　（13）$a_n=-2^{n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$（答案不唯一）

（14）$\sqrt{2}+1$　（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

（16）（本小题 13 分）

解：方案一：选条件①

因为 $f(x)=\cos\omega x\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$

$$=\cos\omega x(\sin\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\cos\omega x\sin\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\cos\omega x+\frac{1}{2}\cos^2\omega x-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\omega x+\frac{1}{4}\cos 2\omega x$$ …………3 分

$$=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6}),$$

又 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$ ，所以 $\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …………5 分

方案二：选条件②

因为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\sin\omega x,\cos 2\omega x)$，$\boldsymbol{n}=(\frac{1}{2}\cos\omega x,\frac{1}{4})$，

所以 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\cos\omega x+\frac{1}{4}\cos 2\omega x=\frac{1}{2}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$.

又 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …………5 分

方案三：选条件③

由题意可知，$T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …………1 分

又因为函数 $f(x)$ 图象经过点 $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$，所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)$. …………3 分

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …………5 分

（Ⅰ）因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$. …………7 分

所以 $f(\theta)=f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$. …………9 分

（Ⅱ）由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ …………12 分

令 $k=0$，得 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$，令 $k=1$，得 $\frac{7\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{3}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，$[\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{3}]$. …………13 分

（17）（本小题 14 分）

解:（Ⅰ） 由表可知，该患者共 6 天的体温不低于 $39^\circ C$，记平均体温为 $\bar{x}$，· ····1 分

$\bar{x}=\frac{1}{6}(39.4+39.7+40.1+39.9+39.2+39.0)=39.55^\circ C$. ·········4 分

所以，患者体温不低于 $39^\circ C$ 的各天体温平均值为 $39.55^\circ C$.

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 $0,1,2$. ···························5 分

$P(X=0)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$, ·····························6 分

$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, ··························7 分

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$. ··························8 分

则 X 的分布列为: ···9 分

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ·······································11 分

（Ⅲ）“抗生素 C”治疗效果最佳可使用理由:

① “抗生素 B”使用期间先连续两天降温 $1.0^\circ C$ 又回升 $0.1^\circ C$，“抗生素 C”使用期间持续降温共计 $1.2^\circ C$，说明“抗生素 C”降温效果最好，故“抗生素 C”治疗效果最佳.

② 抗生素 B”治疗期间平均体温 $39.03^\circ C$，方差约为 0.0156；“抗生素 C”平均体温 $38^\circ C$，方差约为 0.1067，“抗生素 C”治疗期间体温离散程度大，说明存在某个时间节点降温效果明显，故“抗生素 C”治疗效果最佳. ·································14 分

“抗生素 B”治疗效果最佳可使用理由:

（不说使用“抗生素 B”治疗才开始持续降温扣 1 分）

自使用“抗生素 B”开始治疗后，体温才开始稳定下降，且使用“抗生素 B”治疗当天共降温 $0.7^\circ C$，是单日降温效果最好的一天，故“抗生素 B”治疗效果最佳. ···········14 分

（开放型问题，答案不唯一，但答“抗生素 A”效果最好不得分，理由与结果不匹配不得分，不用数据不得分）

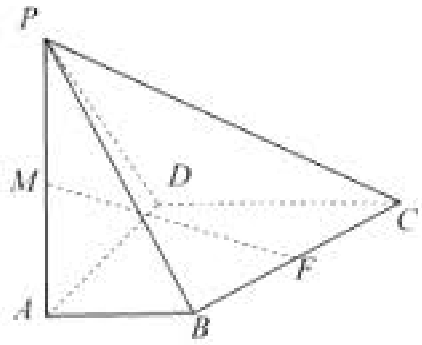
（18）（本小题 14 分）

解：（I）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，　　…………1 分

平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，　　…………2 分

$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，　　…………3 分

所以 $AB\perp$ 平面 PAD，　　…………4 分



又因为 $PD\subset$ 平面 PAD，

所以 $AB\perp PD$．　　…………5 分

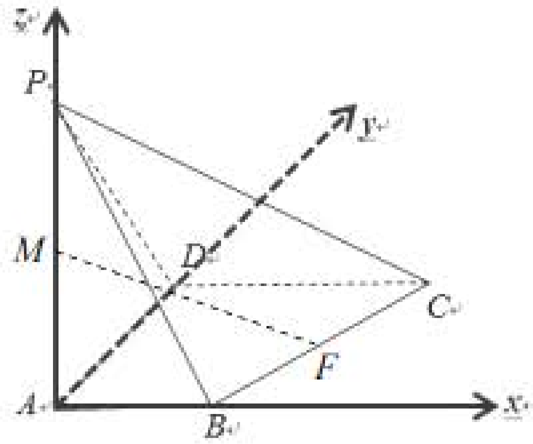
（II）因为 $PA=AD=2$，$PD=2\sqrt{2}$，所以 $PA\perp AD$．

由（I）得 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PA$，

故 AB,AD,AP 两两垂直．

如图，以 A 为原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴

建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $P(0,0,2)$，$B(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$．　　…………6 分

因为 $PA\perp$ 平面 BCD，所以平面 BCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$．

而 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-2z=0,\\ 2x+2y-2z=0.\end{cases}$ 取 $z=1$，有 $\boldsymbol{m}=(2,-1,1)$，　　…………8 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．　　…………10 分

由题知，二面角 $P-BC-D$ 为锐角，

所以二面角 $P-BC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．　　…………11 分

（III）假设棱 BC 上存在点 F，$MF\,/\!/\,PC$，设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC},\lambda\in[0,1]$．　　…………12 分

依题意，可知 $M(0,0,1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$，$F=(\lambda+1,2\lambda,0)$，　　…………13 分

所以$\overrightarrow{MF}=(\lambda+1,2\lambda,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$． …………14 分

根据假设，有$\begin{cases}\lambda+1=2\mu,\\2\lambda=2\mu,\\-1=-2\mu,\end{cases}$ 而此方程组无解，故假设错误，问题得证． …………15 分

（19）（本小题 14 分）

解：（I）由题意得：

$$\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a}=3,\\\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$$ ……………………1 分

解得：$a=2,b=\sqrt{3},c=1$． ……………………2 分

所以椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………………3 分

（II）依题意，若直线l的斜率不为零，可设直线$l:x=my+1(m\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

假设存在点P，设$P(x_0,0)$，由题设，$x_0\neq 1$，且$x_0\neq x_1$，$x_0\neq x_2$．

设直线PA,PB的斜率分别为k_1,k_2，

则$k_1=\dfrac{y_1}{x_1-x_0},k_2=\dfrac{y_2}{x_2-x_0}$． …………4 分

因为$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在$x=my+1$上，

故$x_1=my_1+1,x_2=my_2+1$． …………5 分

而x轴上任意点到直线PA,PB距离均相等等价于“PF平分$\angle APB$”，

继而等价于$k_1+k_2=0$． ……………………6 分

$$\text{则}k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-x_0}+\frac{y_2}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{x_1y_2+x_2y_1-x_0(y_1+y_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+(1-x_0)(y_1+y_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=0.$$ ……………………8 分

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，消去$x$，得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

有$y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$． ……………………10分

则$k_1+k_2=0=\dfrac{-18m-6m+6mx_0}{(3m^2+4)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\dfrac{-24m+6mx_0}{(3m^2+4)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$，

即$-4m+mx_0=0$，故$x_0=4$或$m=0$（舍）． … …………………13分

当直线l的斜率为零时，$P(4,0)$也符合题意．

故存在点$P(4,0)$，使得x轴上任意点到直线PA,PB距离均相等． …………14分

（20）（本小题15分）

解：（Ⅰ） 因为$f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2(a\in\mathbf{R})$，

故$f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$． …………1分

依题意$f'(1)=\mathrm{e}-2a=0$，即$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$． …………2分

当$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时，$f(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}\neq 0$，此时切线不与$x$轴重合，符合题意，因此$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$． …………3分

（Ⅱ） 由（Ⅰ）知，$f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，

当$a\le 0$时，因为$x\in[0,1]$，$\mathrm{e}^x>0$，$-2ax\ge 0$，

故$f'(x)>0$，即$f(x)$单增，因此$f(x)_{\max}=f(1)=\mathrm{e}-a$．

依题意，当$a\le 0$时，$f(x)_{\max}=\mathrm{e}-a\ge \mathrm{e}>2$，所以$a\le 0$符合题意． …………5分

当$a>0$时，$f''(x)=\mathrm{e}^x-2a$，令$f''(x)=0$，有$x=\ln 2a$． …………6分

$f''(x)$，$f'(x)$变化如下：

x	$(-\infty,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,+\infty)$
$f''(x)$	—	0	+
$f'(x)$	↘	极小值	↗

故$f'(x)_{\min}=2a-2a\ln 2a=2a(1-\ln 2a)$． …………7分

当$1-\ln 2a\ge 0$时，即$0<a\le\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$单调递增，

因此$f(x)_{\max}=f(1)=\mathrm{e}-a$．

依题意，令$\mathrm{e}-a\ge 2$，有$0<a\le \mathrm{e}-2$． …………8 分

当$1-\ln 2a<0$时，即$a>\frac{\mathrm{e}}{2}$时，$f'(1)=\mathrm{e}-2a<0$，$f'(0)=1>0$，

故存在唯一$x_0\in(0,1)$使$f'(x_0)=0$． …………9 分

此时有$\mathrm{e}^{x_0}-2ax_0=0$，即$\mathrm{e}^{x_0}=2ax_0$，$f'(x)$，$f(x)$变化如下： …………10 分

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以$f(x)_{\max}=f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-ax_0^{\,2}=\mathrm{e}^{x_0}-\frac{x_0\mathrm{e}^{x_0}}{2}$，$x_0\in(0,1)$． …………11 分

依题意，令$g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x\mathrm{e}^x}{2}$，$x\in(0,1)$，则$g'(x)=\frac{(1-x)\mathrm{e}^x}{2}>0$，$g(x)$在$(0,1)$单调递增，

所以$g(x)<g(1)=\frac{\mathrm{e}}{2}<2$，

所以$f(x)_{\max}<2$，此时不存在符合题意的a．

综上所述，当$a\in(-\infty,\mathrm{e}-2]$，$f(x)$在$[0,1]$上的最大值不小于$2$，

若$a\notin(-\infty,\mathrm{e}-2]$，则$f(x)$在$[0,1]$上的最大值小于$2$，

所以a的取值范围为$(-\infty,\mathrm{e}-2]$． …………………12 分

解法二：

（Ⅱ）当$x\in[0,1]$时，$f(x)$最大值不小于 2，等价于

$f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2\ge 2$在$x\in[0,1]$上有解，显然$x=0$不是解，

即$a\le\frac{\mathrm{e}^x-2}{x^2}$在$x\in(0,1]$上有解， ……………………4 分

设$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-2}{x^2}$，$x\in(0,1]$，

则$g'(x)=\frac{x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+4}{x^3}$． ……………………5 分

设$h(x)=x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+4$，$x\in(0,1]$，

则$h'(x)=\mathrm{e}^x(x-1)\le 0$．

所以$h(x)$在$(0,1]$单调递减，$h(x)\ge h(1)=4-\mathrm{e}>0$， …………7 分

所以$g'(x)>0$，所以$\mathrm{g}(x)$在$(0,1]$单调递增， ……………………9 分

所以 $g(x)_{max}=g(1)=e-2$． ……………………10 分

依题意需 $a\le e-2$，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,e-2]$． ……………………12 分

解法三:

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=e^x-2ax$，

（1）当 $a\le\frac{e}{2}$ 时，$f'(x)=e^x-2ax\ge e^x-ex$，

设 $h(x)=e^x-ex\ x\in[0,1]$，$h'(x)=e^x-e\le 0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，故 $h(x)\ge h(1)=0$． …………5 分

所以 $f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，

因此 $f(x)_{max}=f(1)=e-a$． …………7 分

依题意，令 $e-a\ge 2$，得 $a\le e-2$． …………8 分

（2）当 $a>\frac{e}{2}$ 时，$f(x)=e^x-ax^2\le e^x-\frac{e}{2}x^2$，

设 $\varphi(x)=e^x-\frac{e}{2}x^2$, $x\in[0,1]$,

则 $\varphi'(x)=e^x-ex=h(x)\ge 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增， …………10 分

故 $\varphi(x)_{max}=\varphi(1)=e-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}<2$，即 $f(x)<2$，不符合题意. …………11 分

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,e-2]$． …………12 分

（III）当 $a\le 0$ 时，$y=f(x)$ 有 0 个零点；当 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时，$y=f(x)$ 有 1 个零点

当 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，$y=f(x)$ 有 2 个零点；当 $a>\frac{e^2}{4}$ 时，$y=f(x)$ 有 3 个零点． …………15 分

(21)（本小题 14 分）

解：（Ⅰ） $A=(0,0),\ B=(0,1)$；

$A=(0,1),\ B=(0,0)$； …………1 分

$A=(1,0),\ B=(1,1)$； …………2 分

$A=(1,1),\ B=(1,0)$. …………3 分

（Ⅱ） 令 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n),C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，

对 $i=1,2,\cdots,n$，

当 $c_i=0$ 时，有 $||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$； …………4 分

当 $c_i=1$ 时，有 $||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|1-a_i-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$. …………5 分

所以

$$d(A-C,B-C)=||a_1-c_1|-|b_1-c_1||+||a_2-c_2|-|b_2-c_2||+\cdots+||a_n-c_n|-|b_n-c_n||$$

$$=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=d(A,B).$$ …………6 分

（Ⅲ）$\forall A,B,C\in S_n$，$d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中一定有偶数. 理由如下：

解法一：

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n),C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k,d(A,C)=l,d(B,C)=h$，

记 $0=(0,0,\cdots0)\in S_n$ 由（Ⅱ）可知：$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(0,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(0,C-A)=l$，$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$. …………8 分

所以 $|b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 k，$|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2t$. …………10 分

由此可知，k,l,h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中一定有偶数. …………14 分

解法二：

因为 $(a_i-b_i)+(b_i-c_i)+(c_i-a_i)=0$，

且 $(a_i-b_i)+(b_i-c_i)+(c_i-a_i)$ 与 $|a_i-b_i|+|b_i-c_i|+|c_i-a_i|$ 奇偶性相同. …………8 分

所以 $|a_i-b_i|+|b_i-c_i|+|c_i-a_i|$ 为偶数，

故 $d(A,B)+d(B,C)+d(A,C)$ 为偶数， …………10 分

所以 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中一定有偶数. …………14 分