2020 北京西城高一（上）期末

数　　学

2020.1

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\,|-3<x<3\}$，那么 $A\cap B=$（　　）

（A）$\{-1,1\}$　　（B）$\{-2,0\}$　　（C）$\{-2,0,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1\}$

（2）方程组 $\begin{cases}x+y=0,\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ 的解集是（　　）

（A）$\{(1,-1),(-1,1)\}$　　（B）$\{(1,1),(-1,-1)\}$

（C）$\{(2,-2),(-2,2)\}$　　（D）$\{(2,2),(-2,-2)\}$

（3）函数 $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是（　　）

（A）$[0,1)$　　（B）$(1,+\infty)$

（C）$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　（D）$[0,1)\cup(1,+\infty)$

（4）下列四个函数中，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

（A）$y=x+1$　　（B）$y=x^2-1$　　（C）$y=2^x$　　（D）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

（5）设 $a=\log_2 0.4$，$b=0.4^2$，$c=2^{0.4}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$a<c<b$　　（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

（6）若 $a>b>0$，$c<d<0$，则一定有（　　）

（A）$ac<bd$　　（B）$ac>bd$　　（C）$ad<bc$　　（D）$ad>bc$

（7）设 $a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$．则“$a>b$”是“$|a|>|b|$”的（　　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

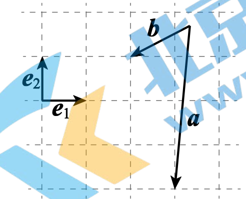
（8）某种药物的含量在病人血液中以每小时 20% 的比例递减．现医生为某病人注射了

2000mg 该药物，那么 x 小时后病人血液中这种药物的含量为（　　）

（A） $2000(1-0.2x)$ mg　　　　（B） $2000(1-0.2)^x$ mg

（C） $2000(1-0.2^x)$ mg　　　　（D） $2000\cdot 0.2^x$ mg

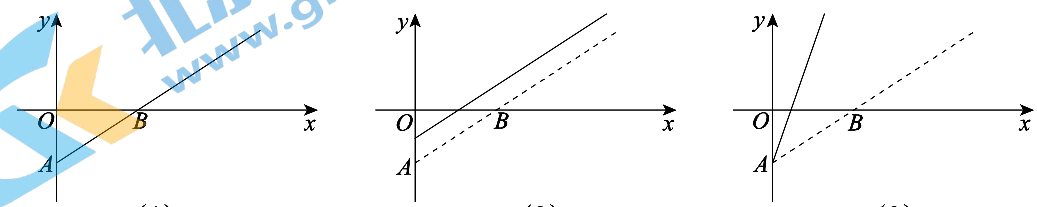
（9）如图，向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于（　　）



（A） $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　　　　（B） $\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$

（C） $-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$　　　　（D） $-\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$

（10）某部影片的盈利额（即影片的票房收入与固定成本之差）记为 y，观影人数记为 x，其函数图像如图（1）所示．由于目前该片盈利未达到预期，相关人员提出了两种调整方案，图（2）、图（3）中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图像．



（1）　　　　（2）　　　　（3）

给出下列四种说法：

① 图（2）对应的方案是：提高票价，并提高成本；

② 图（2）对应的方案是：保持票价不变，并降低成本；

③ 图（3）对应的方案是：提高票价，并保持成本不变；

④ 图（3）对应的方案是：提高票价，并降低成本．

其中，正确的说法是（　　）

（A）①③　　　（B）①④　　　（C）②③　　　（D）②④

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（11）已知方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根为 x_1 和 x_2，则 $x_1^2+x_2^2=$____．

（12）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,m)$，其中 $m\in\mathbf{R}$．若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则 $|\boldsymbol{b}|=$____．

（13）已知函数 $f(x)=\log_3 x$．若正数 a,b 满足 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{9}$，则 $f(a)-f(b)=$____．

（14）函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ x^2-3, & x>0 \end{cases}$ 的零点个数是____；满足 $f(x_0)>1$ 的 x_0 的取值范围是____．

（15）已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-6\geqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,x>c\}$，其中 $c\in\mathbf{R}$．

① 集合 $\complement_{\mathbf{R}}A=$___；

② 若 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x\in A$ 或 $x\in B$，则 c 的取值范围是___．

（16）给定函数 $y=f(x)$，设集合 $A=\{x\,|\,y=f(x)\}$，$B=\{y\,|\,y=f(x)\}$．若对于 $\forall x\in A$，$\exists y\in B$，使得 $x+y=0$ 成立，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．给出下列三个函数：

① $y=\dfrac{1}{x}$；　　② $y=(\dfrac{1}{2})^x$；　　③ $y=\lg x$．

其中，具有性质 P 的函数的序号是___．

三、解答题共 6 小题，共 76 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 12 分）

某校高一新生共有 320 人，其中男生 192 人，女生 128 人．为了解高一新生对数学选修课程的看法，采用分层抽样的方法从高一新生中抽取 5 人进行访谈．

（Ⅰ）这 5 人中男生、女生各多少名?

（Ⅱ）从这 5 人中随即抽取 2 人完成访谈问卷，求 2 人中恰有 1 名女生的概率．

（18）（本小题 12 分）

在直角坐标系 xOy 中，记函数 $f(x)=\log_3(8-2^x)$ 的图像为曲线 C_1，函数 $g(x)=\sqrt{x-3}$ 的图像为曲线 C_2．

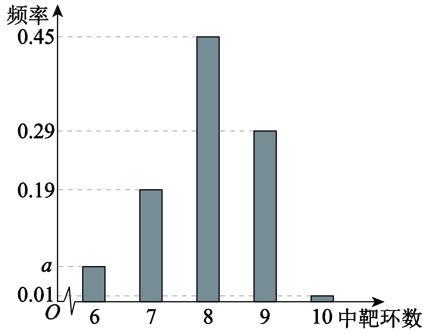
（Ⅰ）比较 $f(2)$ 和 1 的大小，并说明理由；

（Ⅱ）当曲线 C_1 在直线 $y=1$ 的下方时，求 x 的取值范围；

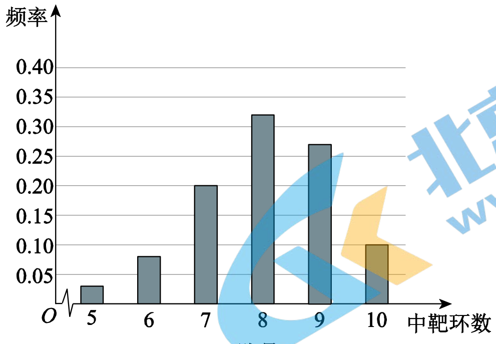
（Ⅲ）证明：曲线 C_1 和 C_2 没有交点．

（19）（本小题 13 分）

根据以往的成绩记录，甲、乙两名队员射击中靶环数（环数为整数）的频率分布情况如图所示.



队员甲



队员乙

假设每名队员每次射击相互独立.

（Ⅰ）求图中 a 的值；

（Ⅱ）队员甲进行 2 次射击．用频率估计概率，求甲恰有 1 次中靶环数大于 7 的概率；

（Ⅲ）在队员甲、乙中，哪一名队员的射击成绩更稳定？（结论无需证明）

（20）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x^2-1}$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 为偶函数；

（Ⅱ）用定义证明：$f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的减函数；

（Ⅲ）当 $x\in[-4,-2]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

（21）（本小题 13 分）

设某商品的利润只由生产成本和销售收入决定．生产成本C（单位：万元）与生产量x（单位：千件）间的函数关系是$C=3+x$；销售收入S（单位：万元）与生产量x间的函数关系是$S=\begin{cases}3x+\dfrac{18}{x-8}+5, & 0<x<6,\\ 14, & x\geqslant 6.\end{cases}$

（Ⅰ）把商品的利润表示为生产量x的函数；

（Ⅱ）为使商品的利润最大化，应如何确定生产量？

（22）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P,\\ -x, & x\in M,\end{cases}$ 其中 P,M 是非空数集．记 $f(P)=\{y\,|\,y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y\,|\,y=f(x),x\in M\}$．

（Ⅰ）若 $P=[0,3]$，$M=(-\infty,-1)$，求 $f(P)\cup f(M)$；

（Ⅱ）若 $P\cap M=\varnothing$，且 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，求集合 P,M；

（Ⅲ）判断命题“若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$”的真假，并加以证明．

2020 北京西城高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）C	（2）A	（3）D	（4）D	（5）A
（6）A	（7）D	（8）B	（9）B	（10）C

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

（11）14　　（12）$3\sqrt{5}$

（13）-2　　（14）2；$(-1,0)\cup(2,+\infty)$

（15）$\{x\,|\,-2<x<3\}$；$(-\infty,-2]$　　（16）①③

注：（14）题，（15）题每空 2 分；（16）题少解给 2 分，有错解不给分。

三、解答题（共 6 小题，共 76 分）

（17）（共 12 分）

解：（Ⅰ）这 5 人中男生人数为 $\frac{192}{320}\times 5=3$； ………………………… 2 分

女生人数为 $\frac{128}{320}\times 5=2$． ………………………… 4 分

（Ⅱ）记这 5 人中的 3 名男生为 B_1,B_2,B_3，2 名女生为 G_1,G_2，则样本空间为：

$\Omega=\{(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,B_3),(B_2,G_1),(B_2,G_2),(B_3,G_1),(B_3,G_2),(G_1,G_2)\}$，

样本空间中，共包含 10 个样本点． ………………………… 7 分

设事件 A 为“抽取的 2 人中恰有 1 名女生”，

则 $A=\{(B_1,G_1),(B_1,G_2),(B_2,G_1),(B_2,G_2),(B_3,G_1),(B_3,G_2)\}$，

事件 A 共包含 6 个样本点． ………………………… 10 分

从而 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$． ………………………… 11 分

所以抽取的 2 人中恰有1名女生的概率为$\frac{3}{5}$. ………………………… 12 分

（18）（共 12 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(2)=\log_3(8-2^2)=\log_3 4$， ………………………… 2 分

又函数 $y=\log_3 x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

所以 $f(2)=\log_3 4>\log_3 3=1$. ………………………… 4 分

（Ⅱ）因为“曲线 C 在直线 $y=1$的下方”等价于“ $f(x)<1$ ”，

所以 $\log_3(8-2^x)<1$. ………………………… 5 分

因为 函数 $y=\log_3 x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数， ………………………… 6 分

所以 $0<8-2^x<3$，

即 $5<2^x<8$， ………………………… 8 分

所以 x 的取值范围是 $(\log_2 5,3)$. ………………………… 9 分

（Ⅲ）因为 $f(x)$ 有意义当且仅当 $8-2^x>0$，

解得 $x<3$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,3)$. ………………………… 10 分

$g(x)$ 有意义当且仅当 $x-3\geqslant 0$，

解得 $x\geqslant 3$.

所以 $g(x)$ 的定义域为 $D_2=[3,+\infty)$. ………………………… 11 分

因为 $D_1\cap D_2=\varnothing$，

所以曲线 C_1 和 C_2 没有交点. ………………………… 12 分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由图可得 $0.01+a+0.19+0.29+0.45=1$， ………………………… 3 分

所以 $a=0.06$. ………………………… 4 分

（Ⅱ）设事件 A 为“队员甲进行1次射击，中靶环数大于7 ”.

则事件 A 包含三个两两互斥的事件：中靶环数为 8，9，10，

所以 $P(A)=0.45+0.29+0.01=0.75$． ………………………… 6 分

设事件 A_i 为“队员甲第 i 次射击，中靶环数大于 7”，其中 $i=1,2$，

则 $P(A_1)=P(A_2)=0.75$． ………………………… 7 分

设事件 B 为“队员甲进行 2 次射击，恰有 1 次中靶环数大于 7”．

则 $B=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$，$A_1,A_2$ 独立． ………………………… 8 分

所以 $P(B)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{8}.$$

所以，甲恰有 1 次中靶环数大于 7 的概率为 $\frac{3}{8}$． ………………………… 10 分

（III）队员甲的射击成绩更稳定． ………………………… 13 分

（20）（共 13 分）

解：（I）因为 $f(x)=\frac{|x|+1}{x^2-1}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq\pm1\}$． ………………………… 2 分

对于任意 $x\in D$，因为 $f(-x)=\frac{|-x|+1}{(-x)^2-1}=\frac{|x|+1}{x^2-1}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数． ………………………… 4 分

（II）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$． ………………………… 6 分

任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，那么

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_2-1}$ ………………………… 7 分

$=\frac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}$． ………………………… 8 分

因为 $1<x_1<x_2$， 所以 $x_2-x_1>0$，$(x_1-1)(x_2-1)>0$，

从而 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$．

所以 $f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的减函数． ………………………… 10 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）、（Ⅱ）得，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增． ………………………… 11 分

因为 $-4\leqslant x\leqslant -2$，

所以 $f(-4)\leqslant f(x)\leqslant f(-2)$， ………………………… 12 分

所以当 $x\in[-4,-2]$ 时， $f(x)$ 的值域是 $[\frac{1}{3},1]$． ………………………… 13 分

（21）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设商品的利润为 Y（万元），

依题意得 $Y=S-C=\begin{cases}2x+\dfrac{18}{x-8}+2, & 0<x<6,\\ 11-x, & x\geqslant 6.\end{cases}$ …………………………4 分

（Ⅱ）当 $0<x<6$ 时， $Y=2x+\dfrac{18}{x-8}+2$．

所以 $Y=2(x-8)+\dfrac{18}{x-8}+18$ …………………………6 分

$=-2[(8-x)+\dfrac{9}{8-x}]+18$ …………………………7 分

$\leqslant -4\sqrt{(8-x)\cdot\dfrac{9}{8-x}}+18$

$=6$． …………………………9 分

当且仅当 $8-x=\dfrac{9}{8-x}$，即 $x=5$ 时取等号，

所以，当 $0<x<6$ 时，Y 有最大值 6（万元）． …………………………11 分

当 $x\geqslant 6$ 时，$Y=11-x\leqslant 5$． …………………………12 分

综上，当 $x=5$ 时，Y 取得最大值 6（万元）． …………………………13 分

因此，当生产量确定为 5 千件时，商品的利润取得最大值 6 万元．

（22）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $P=[0,3]$，$M=(-\infty,-1)$，

所以 $f(P)=[0,3]$，$f(M)=(1,+\infty)$，　　　　……………………………………2 分

所以 $f(P)\cup f(M)=[0,+\infty)$．　　　　……………………………………3 分

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(0)=0$，　　……………………………4 分

所以当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，

所以 $(-\infty,0)\subseteq P$．　同理可证 $(0,+\infty)\subseteq P$．　　……………………………6 分

因为 $P\cap M=\varnothing$，

所以 $P=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$M=\{0\}$．　　……………………………………8 分

（Ⅲ）该命题为真命题．证明如下：　　……………………………………9 分

假设存在非空数集 P,M，且 $P\cup M\neq\mathbf{R}$，但 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$．

首先证明 $0\in P\cup M$．否则，若 $0\notin P\cup M$，则 $0\notin P$，且 $0\notin M$，

则 $0\notin f(P)$，且 $0\notin f(M)$，

即 $0\notin f(P)\cup f(M)$，这与 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$ 矛盾！　……………………11 分

若 $\exists x_0\notin P\cup M$，且 $x_0\neq 0$，则 $x_0\notin P$，且 $x_0\notin M$，

所以 $x_0\notin f(P)$，且 $-x_0\notin f(M)$．

因为 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$，

所以 $-x_0\in f(P)$，且 $x_0\in f(M)$．

所以 $-x_0\in P$，且 $-x_0\in M$．

所以 $f(-x_0)=-x_0$，且 $f(-x_0)=-(-x_0)=x_0$，

根据函数的定义，必有 $-x_0=x_0$，即 $x_0=0$，这与 $x_0\neq 0$ 矛盾！

综上，该命题为真命题．　　……………………………………13 分