一、集合

1. 元素 a 属于(不属于)集合 A 记为 $a\in A(a\notin A)$.
2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. 若 $\forall x\in A$ 有 $x\in B$,则有 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).
5. 若 $A\subseteq B$,$\exists x\in B$,且 $x\notin A$,则有 $A\subsetneqq B$.
6. $A\subseteq B,B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.
7. 空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subseteq A$(A 为任意集合);空集是任意非空集合的真子集.
8. 含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集,有 2^n-1 个真子集,有 2^n-2 个非空真子集.
9. $A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$.
10. $A\cup B=\{x|x\in A,或\ x\in B\}$.
11. $A\cup A=A,A\cup\varnothing=A;A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing$.
12. $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A,A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.
13. $\complement_U A=\{x|x\in \mathbf{U},且\ x\notin A\}$.
14. $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;
    $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

二、数列

1. 数列的通项公式与前 ***n*** 项和的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

2. 等差数列

(1)定义:$a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*,d$ 为常数).

(2)通项公式:$a_n=a_1+(n-1)d$.

(3)等差中项:a,A,b 成等差数列$\Leftrightarrow 2A=a+b\left(或\ A=\dfrac{a+b}{2}\right)$.

(4)性质:$m+n=k+l\Rightarrow a_m+a_n=a_k+a_l(m,n,k,l\in\mathbf{N}^*)$.

(5)前 ***n*** 项和:$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$.

3. 等比数列

(1)定义:$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in\mathbf{N}^*,q$ 为非零常数).

(2)通项公式:$a_n=a_1q^{n-1}$.

(3)等比中项:a,G,b 成等比数列$\Leftrightarrow G^2=ab$.

(4)性质:$m+n=k+l\Rightarrow a_ma_n=a_ka_l(m,n,k,l\in\mathbf{N}^*)$.

(5)前 ***n*** 项和:$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1).\end{cases}$

4. 常用求和公式

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$;　　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

三、基本初等函数

1. 指数

(1)根式

$(\sqrt[n]{a})^n=a(n\in\mathbf{N}^*,且\ n>1)$;$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & (n\ 为大于\ 1\ 的奇数),\\ |a| & (n\ 为大于\ 0\ 的偶数).\end{cases}$

(2)分数指数幂

正分数指数幂:$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,且\ n>1)$;

负分数指数幂:$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,且\ n>1)$.

(3)有理数指数幂的运算性质

$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂 a^α($a>0$,

α是无理数).

2. 对数

(1)基本性质

①负数和零没有对数;

②$\log_a a=1,\log_a 1=0(a>0,a\neq1)$.

(2)常用对数$\log_{10}N$记为$\lg N$;自然对数$\log_e N$记为$\ln N$.

(3)运算性质

设$M>0,N>0,a>0,a\neq1$,则有

①$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$;

②$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;

③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$.

(4)公式

对数恒等式:$a^{\log_a N}=N(N>0,a>0$,且$a\neq1)$.

换底公式:$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(a>0$,且$a\neq1,c>0$,且$c\neq1,b>0)$.

特别地:$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}(a>0,b>0$,且$a\neq1,b\neq1)$.

四、三角函数

1. 角度和弧度的换算

$1°=\dfrac{\pi}{180}\text{rad}=0.017\ 45\text{rad}$

$1\text{rad}=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°=57.30°=57°18'$

2. 弧度制下扇形的弧长和面积公式

(1)弧长公式:$l=|\alpha|r$;

(2)扇形面积公式:$S=\dfrac{1}{2}lr$.

其中,l为弧长,r为圆的半径,α为圆心角的弧度数.

3. 同角三角函数的基本关系

平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

商数关系:$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$.

4. 三角函数的诱导公式

$\sin(k\cdot360°+\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(k\cdot360°+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(k\cdot360°+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$
$\cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$	$\cos(180°\pm\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(90°\pm\alpha)=\mp\cot\alpha$	$\tan(180°\pm\alpha)=\pm\tan\alpha$

五、三角恒等变换

1. 两角和与差的三角函数、倍角公式

(1)两角和与差的三角函数

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

(2)倍角公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2. 积化和差与和差化积公式

(1)积化和差公式

$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

(2)和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

3. 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

4. 辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)(ab\neq0)$，其中 φ 满足 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

六、解三角形

1. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径）.

2. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

3. 三角形面积公式

(1) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$（$A,B,C$ 是 $\triangle ABC$ 的三角 a,b,c 所对的边）.

(2) $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$.

(3) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$（$r$ 为三角形内切圆半径）.

七、不等式

1. 不等式的性质

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$； (2) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

(3) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$； (4) $a+b>c\Rightarrow a>c-b$；

(5) $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$； (6) $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；

(7) $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$； (8) $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n\ (n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$；

(9) $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\ (n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$.

2. 不等式及其解法

(1) 一元二次不等式及其解法

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$，或 $x>x_2\}$ $(x_1<x_2)$	$\left\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$ $(x_1<x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$

(2) 一元高次不等式的解法

一元高次不等式 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0(<0)$（其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$）可用穿根法求解.

(3) 分式不等式的解法

$\frac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$；

$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0(\leqslant0)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\neq0,\\ f(x)\cdot g(x)\geqslant0(\leqslant0).\end{cases}$

(4) 绝对值不等式的解法

① $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\ f(x)<g(x),\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)<g(x);\end{cases}$

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

②$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g(x),\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)>g(x);\end{cases}$

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$.

③$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow[f(x)]^2>[g(x)]^2$.

④形如$|x-a|+|x-b|<c$的不等式可利用零点分段讨论求解.

3. 重要不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant 2ab$. 其中$a,b\in\mathbf{R}$,当且仅当$a=b$时等号成立.

(2)基本不等式:$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

其中$a,b>0$,当且仅当$a=b$时等号成立.

(3)$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

其中,$a,b>0$,当且仅当$a=b$时等号成立.

(4)$4ab\leqslant(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

其中,$a,b\in\mathbf{R}$,当且仅当$a=b$时等号成立.

(5)$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geqslant ab+bc+ca$.

其中,$a,b,c\in\mathbf{R}$,当且仅当$a=b=c$时等号成立.

(6)$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$,当且仅当$|a|=|b|$时等号成立.

4. 利用基本不等式求最值

已知$x,y>0$,则

(1)若$x+y=s$(和为定值),则当$x=y$时,积xy取得最大值$\frac{s^2}{4}\left(xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{s^2}{4}\right)$.

(2)若$xy=p$(积为定值),则当$x=y$时,和$x+y$取得最小值$2\sqrt{p}$ $(x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{p})$.

八、立体几何

1. 空间几何体的侧面积公式

(1)$S_{\text{正棱柱侧}}=Ch$　　(2)$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}Ch'$

(3)$S_{\text{圆柱侧}}=2\pi rl$　　(4)$S_{\text{圆锥侧}}=\pi rl$

(5)$S_{\text{圆台侧}}=\pi(r+r')l$

2. 空间几何体的表面积公式

(1)$S_{\text{圆柱}}=2\pi r(r+l)$　　(2)$S_{\text{圆锥}}=\pi r(r+l)$

(3)$S_{\text{圆台}}=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$　　(4)$S_{\text{球}}=4\pi R^2$

3. 空间几何体的体积公式

(1)$V_{\text{柱体}}=Sh$　　(2)$V_{\text{锥体}}=\frac{1}{3}Sh$

(3)$V_{\text{台体}}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$　　(4)$V_{\text{圆柱}}=\pi r^2h$

(5)$V_{\text{圆锥}}=\frac{1}{3}\pi r^2h$　　(6)$V_{\text{圆台}}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$

(7)$V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi R^3$

4. 平面的基本性质

公理1:$A\in l,B\in l$,且$A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$.

公理2:$A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且$A,B,C$三点不共线$\Rightarrow\alpha$与$\beta$重合.

公理3:$P\in\alpha$,且$P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$,且$P\in l$.

5. 空间两直线平行的判定

(1)$\left.\begin{matrix}a/\!/b\\ b/\!/c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/c$　　(2)$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

(3)$\left.\begin{matrix}a/\!/\alpha\\ a\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$　　(4)$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

6. 空间两直线垂直的判定

(1)$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b/\!/\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b$　　(2)$\left.\begin{matrix}a/\!/b\\ l\perp a\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp b$

(3)三垂线定理及其逆定理

7. 空间两直线异面的判定方法

(1)反证法;

(2)平面外一点与平面内一点的连线,与平面内不过该点的直线是异面直线.

8. 直线与平面平行的判定

(1)$\left.\begin{array}{l}a\not\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha$　(2)$\left.\begin{array}{l}\alpha/\!/\beta\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/\beta$

9. 直线与平面平行的性质

$\left.\begin{array}{l}a/\!/\beta\\ a\subset\alpha\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

10. 平面与平面平行的判定

(1)$\left.\begin{array}{l}a\subset\beta,b\subset\beta\\ a\cap b=P\\ a/\!/\alpha,b/\!/\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\beta/\!/\alpha$　(2)$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ a\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$　(3)$\left.\begin{array}{l}\alpha/\!/\gamma\\ \beta/\!/\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$

11. 平面与平面平行的性质

$\left.\begin{array}{l}\alpha/\!/\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

12. 直线与平面垂直的判定

(1)$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\ a\cap b=A\\ l\perp a,l\perp b\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$　(2)$\left.\begin{array}{l}a/\!/b\\ a\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$

13. 直线与平面垂直的性质

(1)$\left.\begin{array}{l}l\perp\alpha\\ l\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\beta/\!/\alpha$　(2)$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

14. 平面与平面垂直的判定

(1)$\left.\begin{array}{l}l\perp\alpha\\ l\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\beta\perp\alpha$　(2)二面角的平面角 $\theta=90^\circ$

15. 平面与平面垂直的性质

(1)$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=CD\\ AB\subset\alpha,AB\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\beta$　(2)$\left.\begin{array}{l}A\in a,A\in\alpha\\ \alpha\perp\beta,a\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset\alpha$

九、直线、圆与方程

1. 直线与方程

(1)直线方程

①点斜式:$y-y_0=k(x-x_0)$;

②斜截式:$y=kx+b$;

③两点式:$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$;

④截距式:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$;

⑤一般式:$Ax+By+C=0$(A,B 不同时为 0).

(2)直线的斜率公式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$$(x_1\neq x_2)$的直线的斜率公式:$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

(3)两条直线的位置关系

①$l_1(y=k_1x+b_1)$与 $l_2(y=k_2x+b_2)$平行:$k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$;

②$l_1(y=k_1x+b_1)$与 $l_2(y=k_2x+b_2)$垂直:$k_1k_2=-1$;

③$l_1(A_1x+B_1y+C_1=0)$与 $l_2(A_2x+B_2y+C_2=0)$平行:$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq 0)$;

④$l_1(A_1x+B_1y+C_1=0)$与 $l_2(A_2x+B_2y+C_2=0)$垂直:$A_1A_2+B_1B_2=0$.

(4)距离公式

①两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$间的距离:

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 特别地,原点 $O(0,0)$与任意一点 $P(x,y)$的距离 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

②点 $P(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离:

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

③两平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离：$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2. 圆与方程

(1)圆与方程

①圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为(a,b)，半径为 r.

②圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D^2+E^2-4F>0$，圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

(2)直线与圆的位置关系

设直线 $l:Ax+By+C=0$，圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心到直线的距离为 d，则 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$：

$d>r\Leftrightarrow$直线与圆相离；

$d=r\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$d<r\Leftrightarrow$直线与圆相交.

(3)过圆上一点的切线方程

①与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切于点(x_0,y_0)的切线方程：$x_0x+y_0y=r^2$.

②与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相切于点(x_0,y_0)的切线方程：$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

(4)圆与圆的位置关系

设两圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$，$C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$，圆心距 $d=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$，则

$|d|>r_1+r_2\Leftrightarrow$两圆相离；

$|d|=r_1+r_2\Leftrightarrow$两圆外切；

$|r_1-r_2|<|d|<r_1+r_2\Leftrightarrow$两圆相交；

$|d|=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$两圆内切；

$|d|<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$两圆内含.

(5)直线被圆所截弦的问题

设直线与圆相交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则弦 AB 的长：

① $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$（$k$ 为直线 AB 的斜率）.

② $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$（d 为弦心距，r 为圆的半径）.

3. 空间直角坐标系

(1)空间两点间的距离公式

①空间中的任意一点 $P(x,y,z)$与原点的距离：$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

②空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

(2)空间线段的中点坐标

在空间直角坐标系中，若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则线段 AB 的中点坐标是：$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

十、圆锥曲线与方程

1. 椭圆的标准方程及几何性质

标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$

焦点：$(\pm c,0)$或$(0,\pm c)$

离心率：$e=\frac{c}{a}(0<e<1,c^2=a^2-b^2)$

2. 双曲线的标准方程及几何性质

标准方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a,b>0)$

焦点：$(\pm c,0)$或$(0,\pm c)$

渐近线：$y=\pm\frac{b}{a}x$ 或 $y=\pm\frac{a}{b}x$

离心率：$e=\frac{c}{a}(e>1,c^2=a^2+b^2)$

3. 抛物线的标准方程及几何性质

标准方程：$y^2=2px(p>0)$

焦点：$\left(\frac{p}{2},0\right)$

焦半径：$|MF|=x_0+\frac{p}{2}$

准线方程：$x=-\frac{p}{2}$

4. 直线截圆锥曲线的弦长

设弦 AB 的端点坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的斜率为 k，则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

十一、平面向量

1. 向量的概念

(1)向量的基本要素：大小、方向.

(2)向量的表示

字母表示：$\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$.

坐标表示：$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$.

(3)向量的模：向量的模即向量的大小，记作$|\boldsymbol{a}|$.

若 $a=(x_1,y_1)$，则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

(4)特殊的向量：

①零向量：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=0$.

②单位向量：$\boldsymbol{a}$ 为单位向量$\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=1$.

③相等向量：长度相等且方向相同的向量.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$.

2. 向量的运算

(1)向量的加减法

几何运算：三角形法则或平行四边形法则.

坐标运算：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$.

(2)实数与向量的积

定义：$\lambda\mathbf{a}$ 是一个向量，满足 $\lambda>0$ 时，$\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向；$\lambda<0$ 时，$\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向；$\lambda=0$ 时，$\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}$. $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\,|\mathbf{a}|$.

坐标运算：$\lambda\mathbf{a}=\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

(3)向量的数量积

定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

坐标运算：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

3. 重要公式

(1)平面向量基本定理：$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线.

(2)距离公式：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(3)非零向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(4)非零向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(5)夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

十二、导数及其应用

1. 几种常见函数的导数

(1)$c'=0$（c 为常数）　(2)$(x^n)'=nx^{n-1}$（$n\in\mathbf{Q}$，且 $n\neq0$）

(3)$(\sin x)'=\cos x$　(4)$(\cos x)'=-\sin x$

(5)$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$　(6)$(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0$，且 $a\neq1$）

(7)$(\ln x)'=\frac{1}{x}$（$x>0$）　(8)$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$（$x>0$，$a>0$，且 $a\neq1$）

2. 导数运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$（$g(x)\neq0$）.

3. 复合函数的导数

若函数 $u=g(x)$在 x 处可导，$y=f(u)$在 u 处可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$在 x 处可导，且 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

4. 定积分的基本性质

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$为常数);

(2) $\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$(其中 $a<c<b$).

5.微积分基本定理

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$(其中 $F'(x)=f(x)$).

十三、统计与概率

1.统计

(1)方差与标准差

方差:$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$

标准差:$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$

其中,$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

(2)离散型随机变量的均值(或数字期望)与方差

①离散型随机变量的均值:

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$.

性质:$E(aX+b)=aE(X)+b$(a,b是常数);

若 X 服从两点分布,则 $E(X)=p$;

若 X 服从二项分布,即 $X\sim B(n,p)$,则 $E(X)=np$.

②离散型随机变量的方差:$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$.

性质:$D(aX+b)=a^2D(X)$(a,b是常数);

若 X 服从两点分布,则 $D(X)=p(1-p)$;

若 X 服从二项分布,则 $X\sim B(n,p)$,则 $D(X)=np(1-p)$.

2.概率

(1)概率的加法公式

如果事件 A 与事件 B 互斥,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

若事件 A 与事件 B 为对立事件,则 $P(A)=1-P(B)$.

(2)古典概型的概率公式

$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}$.

(3)几何概型的概率公式

$P(A)=\frac{\text{构成事件}A\text{的区域长度(面积或体积)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}}$.

(4)条件概率

设 A,B 为两个事件,则 A 发生的条件下 B 发生的概率:

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.其中 $P(A)>0$.

如果 B 和 C 是两个互斥事件,则

$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

(5) $P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.其中事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

特别地,如果事件 A 与事件 B 相互独立,则有

$P(AB)=P(A)P(B)$.

(6)①两点分布(0-1分布):$P(X=0)=1-p$;$P(X=1)=p$.

②超几何分布:$P(X=k)=\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}(k=0,1,2,\cdots,m)$.

其中 $m=min\{M,n\}$,且 $n\leqslant N,M\leqslant N,m,M,N\in\mathbf{N}^*$.

③二项分布:$P(X=k)=\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$.

十四、常用逻辑用语

p	q	$p\land q$	$p\lor q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真