北京市东直门中学 2022～2023 学年度第二学期期中考试

高一数学　　　　2023.04

考试时间：120 分钟　　　总分：150 分

班级______________________　　姓名____________________　　学号________________

一．选择题：(本题有 12 道小题，每小题 4 分，共 48 分)

1．在平面直角坐标系 xOy 中，若角 α 以 x 轴非负半轴为始边，其终边与单位圆交点的横坐标为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 α 的一个可能取值为

A．$-60°$　　B．$-30°$　　C．$45°$　　D．$60°$

2．下列命题正确的是

A．单位向量都相等　　B．任一向量与它的相反向量不相等

C．平行向量不一定是共线向量　　D．模为 0 的向量与任意非零向量共线

3．已知角 α 的终边在第三象限，且 $\tan\alpha = 2$，则 $\sin\alpha - \cos\alpha =$

A．-1　　B．1　　C．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

4．已知 P 为ΔABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CP}$，则

A．$\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

5．已知向量 $\boldsymbol{a} = (2, 4)$，$\boldsymbol{b} = (-1, 1)$，则 $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} =$

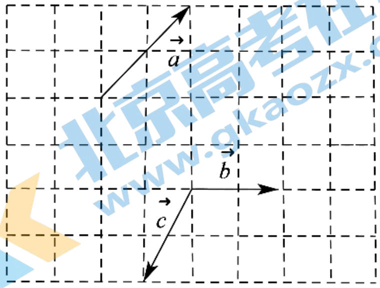
A．$(5, 7)$　　B．$(5, 9)$　　C．$(3, 7)$　　D．$(3, 9)$

6．已知点 $A(1, 3)$，$B(4, -1)$，则与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为

A．$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$　　B．$\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$　　C．$\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$　　D．$\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

7．向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$



A．-4　　　　B．4

C．2　　　　D．-8

8．设点 A，B，C 不共线，则“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$”的

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

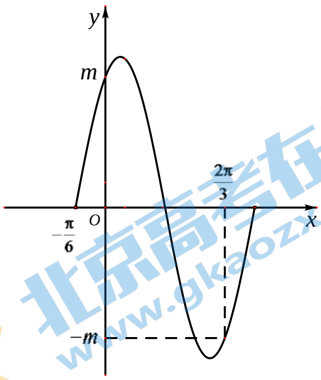
C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

9．已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x$，则

A．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减　　　　B．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$上单调递减

C．$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减　　　　D．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递减

10．若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则 φ 的值是



A．$\frac{\pi}{3}$　　　　B．$\frac{\pi}{6}$

C．$\frac{\pi}{4}$　　　　D．$\frac{\pi}{12}$

11．ΔABC 中，a，b，c 分别是内角 A，B，C 的对边，若 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{3}ab$ 且 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则$\Delta ABC$ 的形状是

A．底角是$\frac{\pi}{6}$的等腰三角形　　　　B．等边三角形

C．三边均不相等的直角三角形　　　　D．等腰直角三角形

12．在ΔABC 中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°$．P 为ΔABC 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是

A．$[-5,3]$　　　　B．$[-3,5]$　　　　C．$[-6,4]$　　　　D．$[-4,6]$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

二．填空题：(本题有 8 道小题，每小题 4 分，共 32 分)

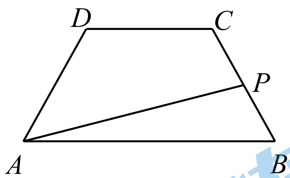
13．已知 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\theta=$ __________，$\cos 2\theta=$ __________．

14．若将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，则平移后得到的函数图象的解析式为______________________．

15．已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$ __________．

16．已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)\ (0\le\varphi<2\pi)$．若 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$上单调递减，则 φ 的一个取值可以为_________．

17．在梯形 $ABCD$ 中，$AB\,//\,DC$，$AD=BC=2$，$AB=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，P 是 BC 的中点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=$ _______．



18．在ΔABC 中，$a=8$，$c=7$，$\cos A=-\frac{1}{7}$，则 $b=$ __________，$\angle C=$ __________．

19．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ __________，$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|\ (t\in\mathrm{R})$的最小值为_____________．

20．正 ΔABC 的边长为 1，中心为 O，过 O 的动直线 l 与边 AB，AC 分别相交于点 M，N，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}\ (\lambda,\mu>0)$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$．给出下列四个结论：

① $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$；　　② 若$\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{4}$；

③ $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$不是定值，与直线 l 的位置有关；

④ ΔAMN 与 ΔABC 的面积之比的最小值为$\frac{4}{9}$．

其中所有正确结论的序号是_________．

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

三．解答题：(本题有 6 小题，共 70 分)

21．(本小题满分 10 分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(t,-1)$，$\boldsymbol{c}=(-3,-1)$.

(I) 若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,//\,(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，求实数 t 的值；

(II) 若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值.

22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x\ (\omega>0)$，且 $f(x)$的图象相邻的两个对称中心之间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

(I) 求 $f(x)$的解析式；

(II) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，关于 x 的不等式 $f(x)\le m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

23．(本小题满分 12 分)

已知 $\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),1\right)$，$\boldsymbol{n}=(2\cos x,-1)$.

(I) 若 $\boldsymbol{m}\,//\,\boldsymbol{n}$，且 $x\in[0,\pi]$，求 x 的值；

(II) 设 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$，求函数 $f(x)$的单调区间.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

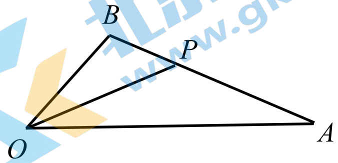
24．(本小题满分 12 分)

在ΔOAB中，P为边AB上的一点，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，$|OA|=6$，$|OB|=2$，且$\angle AOB=60°$，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.

(I) 设$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，试求$x$，$y$的值；

(II) 试求$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$的值；

(III) 试求$\angle BOP$的余弦值.



25．(本小题满分 12 分)

在ΔABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，向量$\boldsymbol{m}=\left(b,\sqrt{3}a\right)$，向量$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin 2A)$，且$\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$.

(I) 求$\angle A$；

(II) 若ΔABC的面积为$3\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使ΔABC存在且唯一确定，求a的值.

条件①：$\sin C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$；　　条件②：$\frac{b}{c}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；　　条件③：$\cos C=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第(II)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

26．(本小题满分 12 分)

设正整数 $n\ge 3$，集合 $A=\{\boldsymbol{a}\mid \boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ x_k\in\mathrm{R},\ k=1,2,\cdots,n\}$，对于集合 A 中的任意元素 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，及实数 λ，定义：当且仅当 $x_k=y_k\ (k=1,2,\cdots,n)$时 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$；$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$.

若 A 的子集 $B=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$满足：当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=(0,0,\cdots,0)$，则称 B 为 A 的完美子集.

(I) 当 $n=3$ 时，已知集合 $B_1=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$，$B_2=\{(1,2,3),(2,3,4),(4,5,6)\}$．分别判断这两个集合是否为 A 的完美子集，并说明理由；

(II) 当 $n=3$ 时，已知集合 $B=\{(2m,m,m-1),(m,2m,m-1),(m,m-1,2m)\}$．若 B 不是 A 的完美子集，求 m 的值；

(III) 已知集合 $B=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}\subseteq A$，其中 $\boldsymbol{a}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})\ (i=1,2,3)$．若 $2|x_{ii}|>|x_{1i}|+|x_{2i}|+|x_{3i}|$对任意 $i=1,2,3$ 都成立，判断 B 是否一定为 A 的完美子集．若是，请说明理由；若不是，请给出反例．

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。