2023 北京东城高二（下）期末

数　　学

2023.7

本试卷共 6 页，满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 36 分）

一、选择题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每个小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，那么 $A\cap B=$

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{0\}$

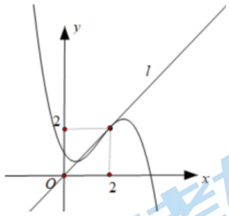
2．从集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中选取两个不同的元素，组成平面直角坐标系中点的坐标，则可确定的点的个数为

A．10　　B．15　　C．20　　D．25

3. 已知 $a=\lg e$，$b=e^2$，$c=\ln\frac{1}{10}$（$e=2.71828\cdots$），那么

A. $b<c<a$　　B．$c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

4．如图，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,2)$ 处的切线为直线 l，直线 l 经过原点 O，则 $f'(2)+f(2)=$

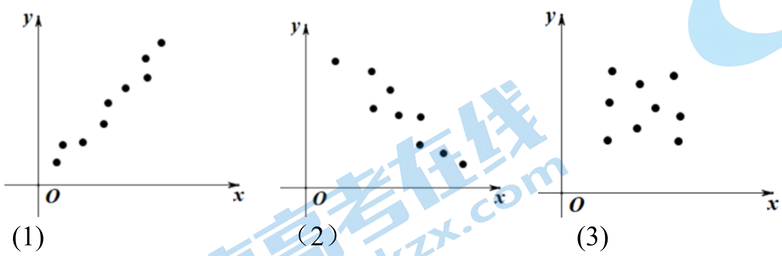


A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 在 $(x-2)^{10}$ 的展开式中，。x^6 的系数为

A．$-64C_{10}^6$　　B．$64C_{10}^6$　　C．$-16C_{10}^4$　　D．$16C_{10}^4$

6. 如图（1）、（2）、（3）分别为不同样本数据的散点图，其对应的样本相关系数分别是 r_1,r_2,r_3， 那么 r_1,r_2,r_3 之间的关系为



A. $r_3<r_2<r_1$　　B. $r_2<r_3<r_1$　　C. $r_3<r_1<r_2$　　D. $r_1<r_3<r_2$

7．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比相等，那么数列 $\{a_n\}$ 中与 a_3a_7 一定相等的项是

A．a_5　　B．a_7　　C．a_9　　D．a_{10}

8．已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$ 的极小值点，那么 a 的取值范围是

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

9．在函数 $y=x\ln x$，$y=\cos x$，$y=2^{x}$，$y=x-\ln x$ 中，导函数值不可能取到 1 的是

A. $y=x\ln x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=2^{x}$　　D. $y=x-\ln x$

10．已知有 7 件产品，其中 4 件正品，3 件次品，每次从中随机取出 1 件产品，抽出的产品不再放回，那么在第一次取得次品的条件下，第二次取得正品的概率为

A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

11. 声压级（SPL）是指以对数尺衡量有效声压相对于一个基准值的大小，其单位为 dB（分贝）. 人类产生听觉的最低声压为 20 μPa（微帕），通常以此作为声压的基准值. 声压级的计算公式为：$\mathrm{SPL}=20\times\lg\frac{P}{P_{ref}}$，其中 P 是测量的有效声压值，P_{ref} 声压的基准值，$P_{ref}=$ 20 μPa . 由公式可知，当声压 $P=20$ μPa 时，$\mathrm{SPL}=0\mathrm{dB}$. 若测得某住宅小区白天的 SPL 值为 50dB，夜间的 SPL 值为 30dB，则该小区白天与夜间的有效声压比为

A. $\frac{5}{3}$　　B. 10　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 20

12．已知函数 $f(x)=ae^{x}-\frac{1}{2}x^{2}\ (a\in\mathrm{R})$，

① 当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点；

③ 当 $a\ge\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有最大值.

那么上面说法正确的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分 (非选择题 共 64 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。

13．已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且 $a_n=2a_{n-1}(n\in\mathbf{N},n>1)$，那么 $a_3=$_______；数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$_____.

14．若函数 $f(x)=\lg\left(x^{2}-mx+1\right)$ 的定义域为 R，则实数 m 的取值范围是___________.

15. 设函数 $f(x)=x^{3}+\frac{a}{x}$（a 为常数），若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，写出一个可能的 a 值________.

16．幸福感是个体的一种主观情感体验，生活中的多种因素都会影响人的幸福感受．为研究男生与女生的幸福感是否有差异，一位老师在某大学进行了随机抽样调查，得到如下数据：

	幸福	不幸福	总计
男生	638	128	766
女生	372	46	418
总计	1010	174	1184

由此计算得到 $\chi^{2}=\frac{1184\times(638\times46-128\times372)^{2}}{1010\times174\times766\times418}\approx7.022$，已知 $P(\chi^{2}\ge6.635)=0.01$，$P(\chi^{2}\ge7.879)=0.005$.

根据小概率值$\alpha = 0.01$的χ^2独立性检验，____（填“可以”或“不能”）认为男生与女生的幸福感有差异；根据小概率值$\alpha = 0.005$的χ^2独立性检验，____（填“可以”或“不能”）认为男生与女生的幸福感有差异.

17．盲盒，是一种新兴的商品. 商家将同系列不同款式的商品装在外观一样的包装盒中，使得消费者购买时不知道自己买到的是哪一款商品. 现有一商家设计了同一系列的 A、B、C 三款玩偶，以盲盒形式售卖，已知 A、B、C 三款玩偶的生产数量比例为 6：3：1. 以频率估计概率，计算某位消费者随机一次性购买 4 个盲盒，打开后包含了所有三款玩偶的概率为________.

18. 设$f(x)=\sin x+mx(m\in \mathrm{R})$，给出下列四个结论：

①不论m为何值，曲线$y=f(x)$总存在两条互相平行的切线；

②不论m为何值，曲线$y=f(x)$总存在两条互相垂直的切线；

③不论m为何值，总存在无穷数列$\{a_n\}$，使曲线$y=f(x)$在$x=a_n(n=1,2,3,\cdots)$处的切线互相平行；

④不论m为何值，总存在无穷数列$\{a_n\}$，使曲线$y=f(x)$在$x=a_n(n=1,2,3,\cdots)$处的切线为同一条直线.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 5 小题，共 46 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19.（本小题 8 分）

某学校举行男子乒乓球团体赛，决赛比赛规则采用积分制，两支决赛的队伍依次进行三场比赛，其中前两场为男子单打比赛，第三场为男子双打的比赛，每位出场队员在决赛中只能参加一场比赛. 某进入决赛的球队共有五名队员，现在需要提交该球队决赛的出场阵容，即三场比赛的出场的队员名单.

（Ⅰ）一共有多少种不同的出场阵容？

（Ⅱ）若队员 A 因为技术原因不能参加男子双打比赛，则一共有多少种不同的出场阵容？

20.（本小题 10 分）

已知$y=f(x)$是定义在$[-3,3]$上的奇函数，当$x\in[-3,0]$时，$f(x)=\frac{1}{9^x}+\frac{a}{4^x}(a\in R)$.

（Ⅰ）求$y=f(x)$在$(0,3]$上的解析式；

（Ⅱ）当$x\in[-1,-\frac{1}{2}]$时，不等式$f(x)\le\frac{m}{3^x}-\frac{1}{4^{x-1}}$恒成立，求实数$m$的取值范围.

21．（本小题 10 分）

近年来，为改善城市环境，实现节能减排，许多城市出台政策大力提倡新能源汽车的使用.根据中国汽车流通协会的发布会报告，将 2023 年 1 月、2 月新能源乘用车市场销量排名前十的城市及其销量统计如下表：

2023 年 1 月		
排名	城市	销量
1	上海	12 370
2	深圳	12 132
3	成都	8 755
4	杭州	8 718
5	郑州	8 673
6	广州	8 623
7	重庆	7 324
8	西安	6 851
9	天津	6 649
10	苏州	6 638

表 1

2023 年 2 月		
排名	城市	销量
1	上海	17 707
2	杭州	15 001
3	深圳	13 873
4	广州	12 496
5	郑州	11 934
6	成都	11 411
7	重庆	8 712
8	北京	8 701
9	苏州	8 608
10	西安	7 680

表 2

（Ⅰ）从 1 月、2 月这两个月中随机选出一个月，再从选出这个月中新能源乘用车市场销量排名前十的城市中随机抽取一个城市，求该城市新能源汽车销量大于 10 000 的概率;

（Ⅱ）从表 1、表 2 的 11 个城市中随机抽取 2 个不同的城市，设这两个城市中 2 月排名比 1 月上升的城市的个数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

22．（本小题 10 分）

已知函数 $f(x)=(m-x)e^x$，$m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $m=2$，求 $f(x)$ 在区间$[-1,2]$上的最大值和最小值；

（Ⅱ）设 $g(x)=x\,f(x)$，求证：$g(x)$ 恰有 2 个极值点；

（Ⅲ）若 $\forall x\in[-2,1]$，不等式 $ke^x\geq x+2$ 恒成立，求 k 的最小值.

23．（本小题 8 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+1(n>1,\ n\in N)$.

（Ⅰ）求a_2，a_3，a_4的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（Ⅲ）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_n=b_{n-1}^2+2b_{n-1}(n>1,n\in N)$.对任意的正整数$n$，是否都存在正整数$m$，使得$a_m=b_n$？若存在，请给予证明；若不存在，请说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。

1. A　2. C　3. D　4. C　5. D　6. B

7. D　8. A　9. D　10. B　11. B　12. C

二、填空题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。

13. 4，2^{n-1}　14. $(-2,2)$　15. 0（答案不唯一，$a\le 0$ 即可）

16. 可以；不能　17. 0.216

18. ①③④（全部选对的得满分，部分选对的得部分分，有错误选项得 0 分.）

注：两空给分 2；1

三、解答题共 5 小题，共 46 分。

19.（本小题 8 分）

解：（Ⅰ）出场阵容可以分两步确定：

第 1 步，从 5 名运动员中选择 2 人，分别参加前两场男单比赛，共有 A_5^2 种；

第 2 步，从剩下的 3 名运动员中选出两人参加男双比赛，共有 C_3^2 种，

根据分步乘法计数原理，不同的出场阵容数量为 $N=A_5^2\times C_3^2=60$．　---------4 分

（Ⅱ）队员 A 不能参加男子双打比赛，有两类方案：

第 1 类方案是队员 A 不参加任务比赛，即除了队员 A 之外的 4 人参加本次比赛，只需从 4 人中选出两人，分别取参加前两场单打比赛，共有 A_4^2 种；

第 2 类方案是队员 A 参加单打比赛，可以分 3 个步骤完成：

第 1 步，确定队员 A 参加的是哪一场单打比赛，共 2 种；

第 2 步，从剩下 4 名队员中选择一名参加另一场单打比赛，共 4 种；

第 3 步，从剩下的 3 名队员中，选出两人参加男双比赛，共有 C_3^2 种，

根据分步乘法计数原理，队员 A 参加单打比赛的不同的出场阵容有 $2\times 4\times C_3^2$ 种；

根据分类加法计数原理，队员 A 不参加男子双打比赛的不同的出场阵容数量为 $N=A_4^2+2\times 4\times C_3^2=36$．

------8 分

20.（本小题 10 分）

（Ⅰ）因为 $y=f(x)$ 是定义在 $[-3,3]$ 上的奇函数，$x\in[-3,0]$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{9^x}+\frac{a}{4^x}(a\in\mathrm{R}),$$

所以 $f(0)=\frac{1}{9^0}+\frac{a}{4^0}=0$，解得 $a=-1$，

所以 $x\in(-3,0]$ 时，$f(x)=\frac{1}{9^x}-\frac{1}{4^x}$，

当 $x\in(0,3]$时， $-x\in[-3,0)$，

所以 $f(-x)=\dfrac{1}{9^{-x}}-\dfrac{1}{4^{-x}}=9^x-4^x$，

又 $f(x)=-f(-x)=4^x-9^x$，

即 $y=f(x)$ 在 $(0,3]$ 上的解析式为 $f(x)=4^x-9^x$；　　　　---------------5 分

（II）因为 $x\in[-1,-\dfrac{1}{2}]$时， $f(x)=\dfrac{1}{9^x}-\dfrac{1}{4^x}$，

所以 $f(x)\le\dfrac{m}{3^x}-\dfrac{1}{4^{x-1}}$ 可化为 $\dfrac{1}{9^x}-\dfrac{1}{4^x}\le\dfrac{m}{3^x}-\dfrac{1}{4^{x-1}}$，

整理得 $m\ge\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$，

令 $g(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$，根据指数函数单调性可得，

所以 $g(x)$ 也是减函数，

所以 $g(x)_{\max}=g(-1)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}=7$，

所以 $m\ge7$，

故实数 m 的取值范围是 $[7,+\infty)$.　　　　------- ----------10 分

21．（本小题 10 分）

解：（I）设“抽到的城市该月新能源汽车销量大于 10000”为事件 A，“选取表 1”为事件 B，“选取表 2”为事件 C，则

$P(A)=P(AB\cup AC)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{10}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{2}{5}$.　　-----------------4 分

（II）两个月共有 11 个城市上榜，其中 2 月排名比 1 月上升的城市有杭州，广州，北京，苏州，故 X 可取 0,1,2.

$P(X=0)=\dfrac{C_7^2}{C_{11}^2}=\dfrac{21}{55}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_7^1C_4^1}{C_{11}^2}=\dfrac{28}{55}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2}{C_{11}^2}=\dfrac{6}{55}$.

所以， X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{21}{55}$	$\dfrac{28}{55}$	$\dfrac{6}{55}$

故随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{21}{55}+1\times\frac{28}{55}+2\times\frac{6}{55}=\frac{8}{11}$.　　-------------------10 分

22.（本小题 10 分）

解：(I) $f(x)=(2-x)e^x$， $f'(x)=(1-x)e^x$.

综上，

x	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)=\frac{3}{e}$	↗	极大值 $f(1)=e$	↘	$f(2)=0$

$f(x)_{\max}=f(1)=e,\ f(x)_{\min}=f(2)=0$.　　--------------4 分

(II) $g(x)=xf(x)=(mx-x^2)e^x$,

$g'(x)=(mx-x^2+m-2x)e^x=-(x^2-(m-2)x-m)e^x$,

$\Delta=(m-2)^2+4m=m^2+4>0$,

所以方程 $x^2-(m-2)x-m=0$ 有两个不同的根，设为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$.则有

综上，

x	$(-\infty,\ x_1)$	x_1	$(x_1,\ x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$g(x)$ 恰有 2 个极值点.　　----------------------7 分

(III) $\because e^x>0$,

$\therefore \forall x\in[-2,1]$，不等式 $k\geq\frac{x+2}{e^x}$ 恒成立.

设 $h(x)=\frac{x+2}{e^x}$， $h'(x)=\frac{e^x-(x+2)e^x}{e^{2x}}=\frac{(-x-1)}{e^x}$,

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	12
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$h(-2)=0$	↗	极大值 $h(-1)=e$	↘	$h(1)=\frac{3}{e}$

$\therefore k\geq h(x)_{\max}=h(-1)=e$， $k_{\min}=e$.　　---------------------10 分

23.（本小题 8 分）

解：（Ⅰ） $a_2=2a_1+1=3$， $a_3=2a_2+1=7$， $a_4=2a_3+1=15$；　　-------------3 分

（Ⅱ） $\because a_n=2a_{n-1}+1(n>1)$， $\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)$，

又 $\because a_1+1=2\neq 0$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列；

$\therefore a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$，

$\therefore a_n=2^n-1$， $n\in\mathbf{N}^*$；　　-------------6 分

（Ⅲ）存在正整数 m，使得 $a_m=b_n$.

由（Ⅱ）可知 $a_n=2^n-1$；

由 $b_n=b_{n-1}^2+2b_{n-1}$，可得 $b_n+1=(b_{n-1}+1)^2$，

则 $b_2+1=(b_1+1)^2=2^2$，

$b_3+1=(b_2+1)^2=2^{2^2}$，

$b_4+1=(b_3+1)^2=2^{2^3}$，

归纳得 $b_n+1=(b_{n-1}+1)^2=2^{2^{n-1}-1}$，即 $b_n=2^{2^{n-1}}-1$；

证明：① 当 $n=1$ 时，$b_1=2^{2^0}-1=1=a_1$，符合题意，

假设当 $n=k$ 时，$b_k=2^{2^{k-1}}-1$，

② 当 $n=k+1$ 时，$b_{k+1}+1=(b_k+1)^2$，

即 $b_{k+1}=(2^{2^{k-1}})^2-1=2^{2^k}-1$，

这说明假设当 $n=k$ 时猜想正确，那么当 $n=k+1$ 时猜想也正确.

由上述可知猜想正确，即 $b_n=2^{2^{n-1}}-1$.

又因为 $a_m=2^m-1$，

所以对任意的正整数 n，都存在正整数 $m=2^{n-1}$，使得 $a_m=b_n$.

-

------------8 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。