2022 北京铁二中高三（上）期中

数　　学

（试卷满分 150 分　考试时长 120 分钟）

考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题纸交回.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\{a,b,c,d\}$，集合 $M=\{a,c\}$，则 $\complement_U M$ 等于（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{a,c\}$　　C. $\{b,d\}$　　D. $\{a,b,c,d\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg x}$ 的定义域是（　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$　　C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，若对于任意两个不相等的实数 x_1，x_2，总有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立，则函数 $f(x)$ 一定是（　　）

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 增函数　　D. 减函数

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=-2$，则 a_9 等于（　　）

A. 256　　B. -256　　C. 512　　D. -512

5. 在 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的二项展开式中，第 4 项的二项式系数是（　　）

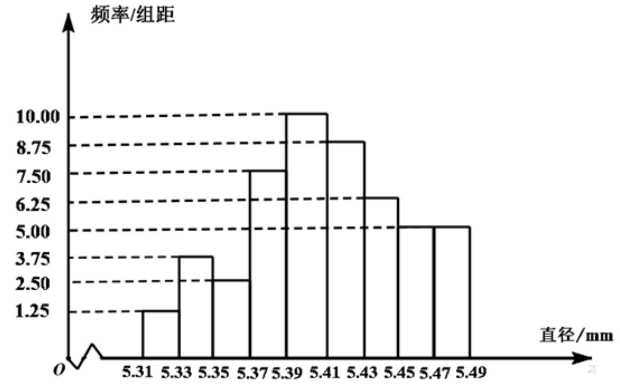
A. 56　　B. -56　　C. 70　　D. -70

6. 设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$a^2>a$”（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 从一批零件中抽取 80 个，测量其直径（单位：mm），将所得数据分为 9 组：$[5.31,5.33),[5.33,5.35),\cdots,[5.45,5.47),[5.47,5.49]$，并整理得到如下频率分布直方图，则在被抽取零件中，直径落在区间 $[5.43,5.47)$ 内的个数为（　　）



A. 10　　B. 18　　C. 20　　D. 36

8. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 给出下列结论：

① $f(x)$ 的最小正周期为 2π；

② $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

③把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象.

其中所有正确结论的序号是（　　）

A. ①　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

9. 在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是（　　）

A. $p_1=p_4=0.1,\ p_2=p_3=0.4$

B. $p_1=p_4=0.4,\ p_2=p_3=0.1$

C. $p_1=p_4=0.2,\ p_2=p_3=0.3$

D. $p_1=p_4=0.3,\ p_2=p_3=0.2$

10. 德国著名数学家、解析数论的创始人狄利克雷（1805 年 2 月 13 日~1859 年 5 月 5 日），对函数论、三角级数论等都有重要贡献，主要著作有《数论讲义》《定积分》等.狄利克雷函数就是以其名字命名的函数，其解析式为 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数},\\ 0, x\text{为无理数},\end{cases}$ 则下列关于狄利克雷函数 $D(x)$ 的判断错误的是（　　）

A. 对任意有理数 t，$D(x+t)=D(x)$

B. 对任意实数 x，$D(D(x))=1$

C. $D(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

D. 存在实数 x，y，$D(x+y)=D(x)+D(y)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. i　虚数单位，复数 $\dfrac{8-i}{2+i}=$________.

12. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3=5,a_7=13$，则$S_{10}=$__________.

13. 若函数$f(x)=g(x)\cdot\cos x$为奇函数，则$g(x)=$_________.（填写一个符合条件的解析式即可）

14. 已知函数$f(x)=x^2+a\left(e^x+e^{-x}\right)$.

①$f(x)$的函数图象关于_________对称；

②若存在唯一$x_0\in\mathbf{R}$，满足$f(x_0)=2023$，则$a=$__________.

15. 已知函数$f(x)=\sin x-\frac{1}{3}x, x\in[0,\pi], \cos x_0=\frac{1}{3}, x_0\in[0,\pi]$.

①$f(x)$的最大值为$f(x_0)$；②$f(x)$的最小值为$f(x_0)$；③$f(x)$在$[0,x_0]$上是减函数；④$f(x_0)$为$f(x)$的极大值.

那么上面命题中真命题的序号是_____.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. $\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别是a,b,c.已知$\sqrt{3}\sin 2C=2\sin^2 C$.

（1）求角C；

（2）若$a=4$，且$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

17. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=8$，$S_{10}=185$，

（1）求此数列的通项公式；

（2）若从此数列中依次取出第二项，第四项，第八项，……，第2^n项，……并按原来的先后顺序组成一个新的数列$\{b_n\}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式与前n项和T_n.

18. 为发展业务，某调研组对A，B两个公司的扫码支付情况进行调查，准备从国内$n(n\in\mathbf{N}, n>0)$个人口超过1000万的超大城市和8个人口低于100万的小城市中随机抽取若干个进行统计.若一次抽取2个城市，全是小城市的概率为$\frac{4}{15}$.

（1）求n的值；

（2）若一次抽取4个城市，

①假设抽取出的小城市的个数为X，求X的可能值及相应的概率；

②若抽取的4个城市是同一类城市，求全为超大城市的概率.

19. 已知函数$f(x)=6\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$.

（1）求$f(x)$的最小正周期和对称轴方程；

（2）若函数$y=f(x)-a$在$x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$存在零点，求实数$a$的取值范围.

20. 已知函数$f(x)=x^2-a\sin x-1, a\in R$.

（1）设函数 $g(x)=f'(x)$，若 $y=g(x)$ 是区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的增函数，求 a 的取值范围；

（2）当 $a=2$ 时，证明函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有一个零点.

21. 设集合 S,T，$S\subseteq\mathbf{N}^*$，$T\subseteq\mathbf{N}^*$，S,T 中至少有两个元素，且 S,T 满足：①对于任意 $x,y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$；②对于任意 $x,y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$；

（1）判断下列两组集合 否满足要求：

（i）若 $S=\{1,2,4,8\}$，则 $T=\{2,4,8,16,32\}$；

（ii）若 $T=\{8,16,32,64,128\}$，则 $S=\{2,4,8,16\}$；

（2）证明：若S有4个元素，则 $S\cup T$ 有7个元素

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】C

【解析】

【分析】利用补集概念求解即可.

【详解】$\complement_U M=\{b,d\}$.

故选：C

2. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意得到$\begin{cases}x>0\\ \lg x\neq 0\end{cases}$，再解不等式组即可.

【详解】由题知：$\begin{cases}x>0\\ \lg x\neq 0\end{cases}$，解得$x>0$且$x\neq 1$.

所以函数定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

故选：B

3. 【答案】C

【解析】

【分析】利用函数单调性定义即可得到答案.

【详解】对于任意两个不相等的实数x_1，x_2，总有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$成立，

等价于对于任意两个不相等的实数$x_1<x_2$，总有$f(x_1)<f(x_2)$.

所以函数$f(x)$一定是增函数.

故选：C

4. 【答案】A

【解析】

【分析】求出等比数列的公比，再由等比数列的通项公式即可求解.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$a_1=1$，$a_2=-2$，所以$q=\dfrac{a_2}{a_1}=-2$，

所以$a_9=a_1q^8=1\times(-2)^8=256$，

故选：A.

5. 【答案】A

【解析】

【分析】本题可通过二项式系数的定义得出结果.

【详解】第 4 项的二项式系数为 $C_8^3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2}=56$，

故选：A.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】首先求解二次不等式，然后结合不等式的解集即可确定充分性和必要性是否成立即可.

【详解】求解二次不等式 $a^2>a$ 可得：$a>1$ 或 $a<0$，

据此可知：$a>1$ 是 $a^2>a$ 的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】本题主要考查二次不等式的解法，充分性和必要性的判定，属于基础题.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据直方图确定直径落在区间 $[5.43,5.47)$ 之间的零件频率，然后结合样本总数计算其个数即可.

【详解】根据直方图，直径落在区间 $[5.43,5.47)$ 之间的零件频率为：$(6.25+5.00)\times0.02=0.225$，

则区间 $[5.43,5.47)$ 内零件的个数为：$80\times0.225=18$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查频率分布直方图的计算与实际应用，属于中等题.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】对所给选项结合正弦型函数的性质逐一判断即可.

【详解】因为 $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，所以周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi$，故①正确；

$f(\dfrac{\pi}{2})=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3})=\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\neq1$，故②不正确；

将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，

故③正确.

故选：B.

【点睛】本题主要考查正弦型函数的性质及图象的平移，考查学生的数学运算能力，逻辑分析那能力，是一道容易题.

9. 【答案】B

【解析】

【分析】计算出四个选项中对应数据的平均数和方差，由此可得出标准差最大的一组.

【详解】对于 A 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_A}=(1+4)\times0.1+(2+3)\times0.4=2.5$，

方差为 $s_A^2=(1-2.5)^2\times0.1+(2-2.5)^2\times0.4+(3-2.5)^2\times0.4+(4-2.5)^2\times0.1=0.65$；

对于 B 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_B}=(1+4)\times0.4+(2+3)\times0.1=2.5$，

方差为 $s_B^2=(1-2.5)^2\times0.4+(2-2.5)^2\times0.1+(3-2.5)^2\times0.1+(4-2.5)^2\times0.4=1.85$；

对于 C 选项，该组数据　平均数为 $\overline{x_C}=(1+4)\times0.2+(2+3)\times0.3=2.5$，

方差为 $s_C^2=(1-2.5)^2\times0.2+(2-2.5)^2\times0.3+(3-2.5)^2\times0.3+(4-2.5)^2\times0.2=1.05$；

对于 D 选项，该组数据的平均数为 $\overline{x_D}=(1+4)\times0.3+(2+3)\times0.2=2.5$，

方差为 $s_D^2=(1-2.5)^2\times0.3+(2-2.5)^2\times0.2+(3-2.5)^2\times0.2+(4-2.5)^2\times0.3=1.45$.

因此，B 选项这一组的标准差最大.

故选：B.

【点睛】本题考查标准差的大小比较，考查方差公式的应用，考查计算能力，属于基础题.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】根据狄利克雷函数的定义判断 ABD，结合奇偶性的定义判断 C.

【详解】对于 A，对任意有理数 t，当 x 为有理数时， $x+t$ 为有理数，则 $D(x+t)=1=D(x)$；当 x 为无理数时， $x+t$ 为无理数，则 $D(x+t)=0=D(x)$，故 A 正确；

对于 B，若 x 为有理数，则 $D(D(x))=D(1)=1$；若 x 为无理数，则 $D(D(x))=D(0)=1$，故 B 正确；

对于 C，当 x 为有理数时，则 $-x$ 为有理数，则 $D(-x)=1=D(x)$；当 x 为无理数时，则 $-x$ 为无理数，则 $D(-x)=0=D(x)$，于是对任意实数 x，都有 $D(-x)=D(x)$，即狄利克雷函数为偶函数，故 C 错误；

对于 D，取 $x=\sqrt{2}$， $y=\sqrt{3}$，因为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为无理数，所以 $D(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0=D(\sqrt{2})+D(\sqrt{3})$，故 D 正确.

故选：C.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$3-2i$

【解析】

【分析】将分子分母同乘以分母的共轭复数，然后利用运算化简可得结果.

【详解】$\frac{8-i}{2+i}=\frac{(8-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{15-10i}{5}=3-2i$.

故答案为：$3-2i$．

【点睛】本题考查复数的四则运算，属于基础题.

12. 【答案】100

【解析】

【分析】根据题意可求出首项和公差，进而求得结果.

【详解】$\begin{cases} a_3=a_1+2d=5 \\ a_7=a_1+6d=13 \end{cases}$，得$\begin{cases} a_1=1 \\ d=2 \end{cases}$，

$\therefore S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=10\times 1+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2=100.$

【点睛】本题考点为等差数列的求和，为基础题目，利用基本量思想解题即可，充分记牢等差数列的求和公式是解题的关键.

13. 【答案】x，x^3，$\sin x$（答案不唯一）.

【解析】

【分析】由奇函数定义$f(-x)=-f(x)$结合三角函数诱导公式可得$g(-x)=-g(x)$，即$g(x)$为奇函数.

【详解】由$f(x)=g(x)\cdot\cos x$为奇函数，则$f(-x)=-f(x)$，即$g(-x)\cos(-x)=-g(x)\cdot\cos x$恒成立，考虑到$\cos x$ 任意性，可得$g(-x)=-g(x)$，则$g(x)$为奇函数即可，

故答案为：$x,x^3,\sin x$（答案不唯一）.

14. 【答案】 ①. y轴##$x=0$ ②. $\dfrac{2023}{2}$##1011.5##$1011\dfrac{1}{2}$

【解析】

【分析】由奇偶性定义可知$f(x)$为偶函数，可知图象关于y轴对称；由对称性可知$x_0=0$，由$f(0)=2023$可求得结果.

【详解】①$\because f(x)$定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=(-x)^2+a(e^{-x}+e^{x})=x^2+a(e^{x}+e^{-x})=f(x)$，

$\therefore f\ \ x$ 为偶函数，图象关于y轴对称；

②由①知：$f(x)$图象关于y轴对称，

又存在唯一$x_0\in\mathbf{R}$，满足$f(x_0)=2023$，则$x_0=0$，

$\therefore f(0)=2a=2023$，解得：$a=\dfrac{2023}{2}$.

故答案为：y轴；$\dfrac{2023}{2}$.

15. 【答案】①④

【解析】

【分析】求出函数$f(x)$的导数，根据给定条件探讨导数值的正负即可判断作答.

【详解】由 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}x$ 求导得：$f'(x)=\cos x-\frac{1}{3}$，显然函数 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，而 $f'(x_0)=0$，

因此，当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x_0)>0$，当 $x_0<x<\pi$ 时，$f'(x_0)<0$，即函数 $f(x)$ $[0,x_0]$ 上单调递增，在 $[x_0,\pi]$ 上单调递减，

$f(x)$ 的最大值为 $f\left(x_0\right)$，$f\left(x_0\right)$ 为 $f(x)$ 的极大值，①④正确，②③不正确，

所以给定命题中真命题的序号是①④.

故答案为：①④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$

(2) $2\sqrt{3}+6$

【解析】

【分析】(1) 利用正弦的二倍角公式变形可求得 C 角；

(2) 由面积公式求得 b，再由余弦定理求得 c，从而得三角形周长.

【小问 1 详解】

因为 $2\sqrt{3}\sin C\cos C=2\sin^2 C,\sin C\neq 0$，

所以 $\tan C=\sqrt{3}$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}\times 4b\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}b=2\sqrt{3}$，解得 $b=2$，

由余弦定理得 $c^2=4^2+2^2-2\times 4\times 2\cos\frac{\pi}{3}=12$，

解得 $c=2\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{3}+6$.

17. 【答案】(1) $a_n=3n+2$

(2) $b_n=3\cdot 2^n+2$，$T_n=6\times 2^n+2n-6$.

【解析】

【分析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，依题意得到方程组，解得 a_1，d，即可得到通项公式；

(2) 由 (1) 可得 $b_n=3\cdot 2^n+2$，利用等比数列前 n 和公式及分组求和法计算可得.

【小问 1 详解】

解：设$\{a_n\}$的公差为d，依题意可得$\begin{cases}a_1+d=8\\10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=185\end{cases}$.

解得$a_1=5$，$d=3$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=3n+2$.

【小问 2 详解】

解：依题意$b_n=a_{2^n}=3\cdot2^n+2$，

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(3\times2^1+2)+(3\times2^2+2)+\cdots+(3\times2^n+2)$

$=3\times(2^1+2^2+\cdots+2^n)+2n$

$=3\times\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}+2n$

$=6\times2^n+2n-6$.

18. 【答案】（1）$n=7$；

（2）①X的可能取值为 0，1，2，3，4，相应概率见解析；

②$\dfrac{1}{3}$.

【解析】

【分析】(1)利用古典概型求概率的公式把一次抽取 2 个城市全是小城市的概率表示出来，解方程即可；

(2)① X 的分布符合超几何分布，根据超几何分布的概率计算方法求概率即可；

②利用条件概率求概率的方法求概率即可.

【小问 1 详解】

从$(n+8)$个城市中一次抽取 2 个城市，有C_{n+8}^2种情况，

其中全是小城市的有C_8^2种情况，则全是小城市的概率为$\dfrac{C_8^2}{C_{n+8}^2}=\dfrac{8\times7}{(n+8)(n+7)}=\dfrac{4}{15}$，

解得$n=7$（负值舍去）.

【小问 2 详解】

①由题意可知，X的可能取值为 0，1，2，3，4，

相应的概率分别记为$P(X=k)(k=0,1,2,3,4)$，

$P(X=0)=\dfrac{C_8^0C_7^4}{C_{15}^4}=\dfrac{1}{39}$，$P(X=1)=\dfrac{C_8^1C_7^3}{C_{15}^4}=\dfrac{8}{39}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_8^2C_7^2}{C_{15}^4}=\dfrac{28}{65}$，$P(X=3)=\dfrac{C_8^3C_7^1}{C_{15}^4}=\dfrac{56}{195}$，

$P\left(X=4\right)=\frac{C_8^4C_7^0}{C_{15}^4}=\frac{2}{39}$.

②若抽取 4 个城市全是超大城市，共有 $C_7^4=35$ 种情况；

若抽取的 4 个城市全是小城市，共有 $C_8^4=70$ 种情况，

所以若抽取的 4 个城市是同一类城市，则全为超大城市的概率为 $\frac{35}{35+70}=\frac{1}{3}$.

19. 【答案】（1）最小正周期为 π，对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$

（2）$\left[0,3\right]$

【解析】

【分析】（1）化简函数 $f\left(x\right)=3\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，结合三角函数的图象与性质，即可求解；

（2）根据题意转化为 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{a}{3}$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上有解，根据 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，得到 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in\left[0,1\right]$，即可求解.

【小问 1 详解】

解：对于函数 $f\left(x\right)=6\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}=6\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)+\frac{3}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x-3\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{3}{2}=3(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，

令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的对称轴的方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$.

【小问 2 详解】

解：因为函数 $y=f\left(x\right)-a$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 存在零点，

即方程 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{a}{3}$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上有解，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，可得 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$，可得 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in\left[0,1\right]$，

所以 $0\le\frac{a}{3}\le 1$，解得 $0\le a\le 3$，

所以实数a的取值范围$[0,3]$.

20. 【答案】（1）$[-2,+\infty)$

（2）证明见及解析

【解析】

【分析】（1）求导$f'(x)=2x-a\cos x$．令$g(x)=2x-a\cos x$，求导，根据函数$g(x)$是区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的增函数，由$g'(x)\geq 0$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上恒成立求解；

（2）求导$f'(x)=2x-2\cos x$．利用导数法证明

【小问1详解】

解：$f'(x)=2x-a\cos x$.

设$g(x)=2x-a\cos x$，则$g'(x)=2+a\sin x$.

$\because$函数$g(x)$是区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的增函数，

$\therefore g'(x)=2+a\sin x\geq 0$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上恒成立

若$x=0$，则$g'(x)=2\geq 0$恒成立，此时$a\in R$；

若$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，此时$0<\sin x\leq 1$，

$\therefore g'(x)=2+a\sin x\geq 0$恒成立，即$a\geq -\frac{2}{\sin x}$恒成立；

$\therefore a\geq -2$.

综合上：a的取值范围是$[-2,+\infty)$.

【小问2详解】

当$a=2$时，$f(x)=x^2-2\sin x-1, x\in(0,\pi)$，

则$f'(x)=2x-2\cos x$.

$\therefore f'(x)$在区间$(0,\pi)$上单调递增.

$\because f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)>0$，

$\therefore$存在$x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(x_0)=0$.

当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,\pi)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

又 $f(0)=-1<0$， $f(\pi)=\pi^2-1>0$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有一个零点.

21. 【答案】(1)（ⅰ）不满足要求；（ⅱ）满足要求

（2）证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据集合中元素满足的关系式依次判断是否满足两个条件即可；

（2）设 $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{N}^*$ 且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，则 $a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_2a_3,a_2a_4,a_3a_4\in T$；若 $a_1=1$，由条件②可推导得到 $S=\{1,a_2,a_2^2,a_2^3\}$，验证可知不满足条件，则 $a_1\neq1$；再次利用条件②可推导得到 $S=\{a_1,a_1^2,a_1^3,a_1^4\}$，可知 $T=\{a_1^3,a_1^4,a_1^5,a_1^6,a_1^7\}$，此时满足条件，由此可确定 $S\cup T$ 共 7 个元素.

【小问 1 详解】

（ⅰ）$\because x,y\in S$，$x\neq y$，$S=\{1,2,4,8\}$，$\therefore xy=2$ 或 4 或 8 或 16 或 32，

又 $xy\in T$，$\therefore T=\{2,4,8,16,32\}$，满足条件①；

当 $T=\{2,4,8,16,32\}$ 时，$\because x,y\in T$，$x<y$，$\therefore \dfrac{y}{x}=2$ 或 4 或 8 或 16，

$\therefore S=\{2,4,8,16\}\neq\{1,2,4,8\}$，不满足条件②；

综上所述：若 $S=\{1,2,4,8\}$，则 $T=\{2,4,8,16,32\}$ 不满足条件.

（ⅱ）$\because x,y\in T$，$x<y$，$T=\{8,16,32,64,128\}$，$\therefore \dfrac{y}{x}=2$ 或 4 或 8 或 16，$\therefore S=\{2,4,8,16\}$，满足条件②；

当 $S=\{2,4,8,16\}$ 时，$\because x,y\in S$，$x\neq y$，$\therefore xy=8$ 或 16 或 32 或 64 或 128，

$\therefore T=\{8,16,32,64,128\}$，满足条件①；

综上所述：若 $T=\{8,16,32,64,128\}$，则 $S=\{2,4,8,16\}$ 满足条件.

【小问 2 详解】

设 $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{N}^*$ 且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，

则 $a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_2a_3,a_2a_4,a_3a_4\in T$，

$\therefore \dfrac{a_3}{a_2}\in S$，$\dfrac{a_4}{a_2}\in S$，$\dfrac{a_3}{a_1}\in S$，$\dfrac{a_4}{a_1}\in S$，$\dfrac{a_2}{a_1}\in S$，$\dfrac{a_4}{a_3}\in S$，

若 $a_1=1$，则 $a_2\in S$，$a_3\in S$，$a_4\in S$，

$\because \dfrac{a_3}{a_2}<a_3$，$\therefore \dfrac{a_3}{a_2}=a_2$，即 $a_3=a_2^2$；又 $a_4>\dfrac{a_4}{a_2}>\dfrac{a_4}{a_3}>1$，$\therefore \dfrac{a_4}{a_2}=a_3$，$\dfrac{a_4}{a_3}=a_2$，

即 $a_4=a_2^3$，$\therefore S=\{1,a_2,a_2^2,a_2^3\}$，$\therefore a_2^5\in T$，又 $a_1a_2=a_2\in T$，

$\therefore \dfrac{a_2^5}{a_2} = a_2^4 \in S$，显然不成立，$\therefore a_1 > 1$；

当 $a_1 > 1$ 时，$a_3 > \dfrac{a_3}{a_1} > \dfrac{a_2}{a_1} > 1$，$\therefore \dfrac{a_3}{a_1} = a_2$，$\dfrac{a_2}{a_1} = a_1$，$\therefore a_2 = a_1^2$，$a_3 = a_1 a_2 = a_1^3$；

又 $a_4 > \dfrac{a_4}{a_1} > \dfrac{a_4}{a_2} > \dfrac{a_4}{a_3} > 1$，$\therefore \dfrac{a_4}{a_1} = a_3$，$\dfrac{a_4}{a_2} = a_2$，$\dfrac{a_4}{a_3} = a_1$，$\therefore a_4 = a_1 a_3 = a_1^4$；

$\therefore S = \left\{a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4\right\}$，$\therefore T = \left\{a_1^3, a_1^4, a_1^5, a_1^6, a_1^7\right\}$，

此时 S,T 满足条件①②，$\therefore S \cup T = \left\{a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_1^5, a_1^6, a_1^7\right\}\left(a_1 \neq 1\right)$；

综上所述：若S有4个元素，则 $S \cup T$ 有7个元素.

【点睛】关键点点睛：本题考查集合中的新定义问题；第二问证明问题的关键是能够通过对于 a_1 是否等于1的讨论，结合集合中元素的大小关系和满足的条件确定集合S，进而验证 S,T 是否满足两个条件来得到结论.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。