# 北京十五中高三年级阶段测试数学试卷

2022.12

本试卷共 4 页，150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效.

## 第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2\leqslant 9\}$，$B=\{x\mid x>-2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0,1,2,3\}$　　（B）$\{1,2,3\}$　　（C）$\{-1,0,1,2,3\}$　　（D）$\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$

2.已知复数 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$，则 $z$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

（A）2　　（B）1　　（C）$-1$　　（D）$-2$

3.已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$S_n$ 为其前 $n$ 项和．若 $a_5=S_5=5$，则 $a_1=$

（A）$-5$　　（B）$-4$　　（C）$-3$　　（D）$-2$

4.设 $m$，$n$ 是两条不同的直线，$\alpha$，$\beta$ 是两个不同的平面. 则下列命题中正确的是

（A）$m\perp\alpha$，$n\subset\beta$，$m\perp n\Rightarrow\alpha\perp\beta$　　（B）$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\perp m\Rightarrow n\perp\beta$

（C）$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta\Rightarrow m\perp n$　　（D）$\alpha/\!/\beta$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta\Rightarrow m\perp n$

5. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}-\mathrm{e}^{-|x|}$，则 $f(x)$

（A）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增　　（B）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

（C）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增　　（D）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，若 $b_n=2^{a_n}$，则“$d<0$”是“$\{b_n\}$ 为递减数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

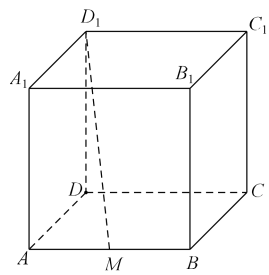
7.设 $P$ 是圆 $x^2+y^2-10x-6y+25=0$ 上的动点，$Q$ 是直线 $x=-4$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为

（A）6　　（B）4　　（C）3　　（D）2

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$M$ 为棱 $AB$ 的中点，动点 $P$ 在平面 $BCC_1B_1$ 及其边界上运动，总有 $AP\perp D_1M$，则动点 $P$ 的轨迹为

（A）两个点　　（B）线段

（C）圆的一部分　　（D）抛物线的一部分



9.被誉为信息论之父的香农提出了一个著名的公式：$C = W\log_2(1+\frac{S}{N})$，其中$C$为最大数据传输速率，单位为$\mathrm{bit/s}$；$W$为信道带宽，单位为Hz；$\frac{S}{N}$为信噪比．香农公式在5G技术中发挥着举足轻重的作用．当$\frac{S}{N}=99$，$W=2000\mathrm{Hz}$时，最大数据传输速率记为$C_1$；当$\frac{S}{N}=9999$，$W=3000\mathrm{Hz}$时，最大数据传输速率记为$C_2$，则$\frac{C_2}{C_1}$为

（A）1　　（B）$\frac{5}{2}$　　（C）$\frac{15}{4}$　　（D）3

10.已知$\Delta ABC$的三个顶点A，$B$，$C$的坐标分别为$(0,1)$，$(\sqrt{2},0)$，$(0,-2)$，$O$为坐标原点，动点$P$满足$|\overrightarrow{CP}|=1$，则$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}|$的最小值是

（A）$\sqrt{3}-1$　　（B）$\sqrt{11}-1$　　（C）$\sqrt{3}+1$　　（D）$\sqrt{11}+1$

## 第二部分（非选择题　共110分）

**二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.**

11.在$(x-\frac{1}{x^2})^6$的展开式中，常数项为__________.

12. 已知双曲线$y^2+\frac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则$m=$__________.

13.如果抛物线$y^2=2px$上一点$A(4,m)$到准线的距离是6，那么$m=$ ____.

14. 设函数$f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\geq a.\end{cases}$若$f(x)$存在最小值，则$a$的一个取值为________；$a$的最大值为____________.

15.曲线$C$：$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=3$，点$P$在曲线$C$上．给出下列三个结论：

①曲线$C$关于$y$轴对称；

②曲线$C$上的点的横坐标的取值范围是$[-2,2]$；

③若$A(-1,0)$，$B(1,0)$，则存在点$P$，使△$PAB$的面积大于$\frac{3}{2}$.

其中，所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 5 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

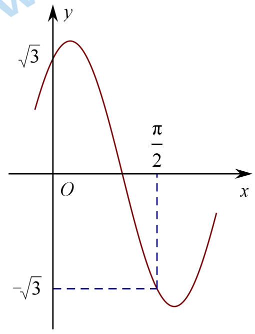
16.（13 分）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示.

（Ⅰ）直接写出 $\omega$ 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②中选择一个作为已知，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最小值.

条件①：直线 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

条件②：$(\dfrac{\pi}{3},0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心.

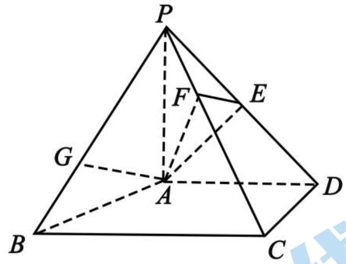



17.（13 分）如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面$ABCD$，$AD\perp CD$，$AD//BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$．$E$ 为 $PD$ 的中点，点 $F$ 在 $PC$ 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$．

（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面$PAD$；

（Ⅱ）求二面角 $F\text{-}AE\text{-}P$ 的余弦值；

（Ⅲ）设点 $G$ 在 $PB$ 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$．判断直线 $AG$ 是否在平面 $AEF$ 内，说明理由.




18.（14 分）一款小游戏的规则如下：每盘游戏都需抛掷骰子三次，出现一次或两次“6 点”获得 15 分，出现三次“6 点”获得 120 分，没有出现“6 点”则扣除 12 分(即获得－12 分).

（Ⅰ）设每盘游戏中出现“6 点”的次数为 $X$，求 $X$ 的分布列；

（Ⅱ）玩两盘游戏，求两盘中至少有一盘获得 15 分的概率；

（Ⅲ）玩过这款游戏的许多人发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了．请运用概率统计的相关知识分析解释上述现象.

19.（15 分）已知函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)<\frac{1}{3}x^3$；

（Ⅲ）若 $f(x)>kx-x\cos x$ 对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，求实数 $k$ 的最大值．

20.（15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$．

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）过点 $B(-4,0)$ 的直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于点 $M,N$，直线 $MA,NA$ 分别交直线 $x=-4$ 于点 $P,Q$．求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值．

21.（15 分）对于数列 $\{a_n\}$，定义 $a_n^*=\begin{cases}1, & a_{n+1}\geqslant a_n,\\ -1, & a_{n+1}<a_n.\end{cases}$ 设 $\{a_n^*\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n^*$．

（Ⅰ）设 $a_n=\frac{n}{2^n}$，写出 $a_1^*$，$a_2^*$，$a_3^*$，$a_4^*$；

（Ⅱ）证明："对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$"的充要条件是"对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n+1}-a_n|=1$"；

（Ⅲ）已知首项为 0，项数为 $m+1(m\geqslant 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足：

①对任意 $1\leqslant n\leqslant m$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+1}-a_n\in\{-1,0,1\}$；② $S_m^*=a_m$．

求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数．

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。