

高二数学试卷

考生须知

1. 本试卷共 6 页,共两部分,21 道小题,满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 在答题卡上准确填写学校、姓名、班级和教育 ID 号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束后,请将答题卡上交。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分,在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。)

(1) 直线 $l: x - y - 1 = 0$ 的倾斜角为

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

(2) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中,已知点 $A(2, -3, 0)$,若向量 $\vec{AB} = (1, 2, -3)$,则点 B 的坐标是

- (A) $(-3, 1, 3)$ (B) $(1, -5, 3)$ (C) $(3, +1, -3)$ (D) $(-1, 5, 3)$

(3) 圆 $O_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $O_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ 的位置关系是

- (A) 外离 (B) 外切 (C) 相交 (D) 内切

(4) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = 2a_n$, 且 $a_1 = 1$, 则 a_4 等于

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 16

(5) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3, BC = 2, AA_1 = 1$, 则点 D 到平面 BCD_1 的距离为

- (A) 1 (B) 3 (C) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(6) 已知双曲线 C 经过点 $P(\sqrt{2}, 3)$, 其渐近线方程为 $y = \pm 3x$, 则双曲线 C 的方程为

- (A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ (C) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{4} = 1$

(7) 已知直线 $l_1: ax - y - 1 = 0, l_2: ax + (a+2)y - 1 = 0$. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则实数 $a =$

- (A) 0 或 -3 (B) 0 (C) -3 (D) -1 或 2

(8) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 1$, 公比为 q , 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则“ $0 < q < 1$ ”是“数列 $\{T_n\}$ 为递减数列”的

- (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 《周髀算经》中有这样一个问题: 从冬至日起, 依次有小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气. 立竿测影, 得其最短日影长依次成等差数列, 若冬至、立春、春分日影长之和为 31.5 尺, 春分日影长为 7.5 尺, 则这十二个节气中后六个(春分至芒种)日影长之和为

- (A) 8.5 尺 (B) 30 尺 (C) 66 尺 (D) 96 尺

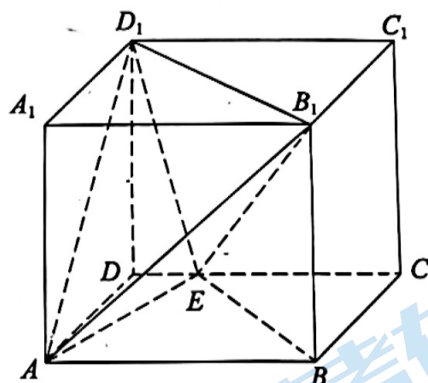
(10) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 CD 上的动点, 则下列结论正确的是

(A) 直线 AE 与 B_1D_1 所成角的范围是 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

(B) 直线 D_1E 与平面 A_1D_1DA 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

(C) 二面角 $E-A_1B_1-A$ 的大小不确定

(D) 直线 AE 与平面 BB_1E 不垂直



第二部分(非选择题 共 110 分)

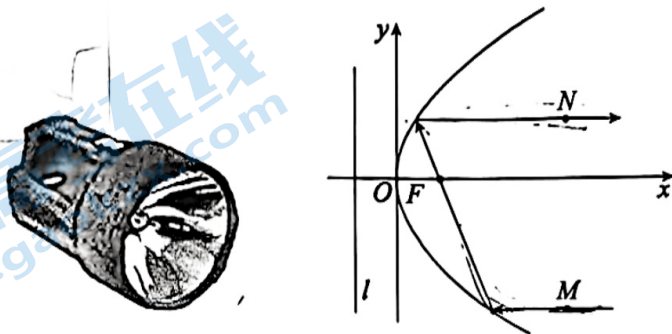
二、填空题(本题共 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分, 把答案填在答题卡上.)

(11) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = -3$, 且 $a_3 + a_8 = 21$, 则 $a_{10} =$ _____.

(12) 已知平面 α 的法向量为 $n = (-1, 2, 1)$, $\vec{AB} = (3, x, 1)$, 若直线 AB 与平面 α 平行, 则 $x =$ _____.

(13) 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 若直线 $y = kx - 1$ 与圆 C 有两个不同的交点, 写出符合题意的一个实数 k 的值 _____.

(14) 探照灯、汽车灯等很多灯具的反光镜是抛物面(其纵断面是抛物线的一部分),正是利用了抛物线的光学性质:由其焦点射出的光线经抛物线反射之后沿对称轴方向射出.根据光路可逆图,在平面直角坐标系中,抛物线 $C: y^2 = 8x$, 一条光线经过点 $M(10, y_0)$, 与 x 轴平行射到抛物线 C 上, 经过两次反射后经过点 $N(10, \frac{8}{3})$ 射出, 则光线从点 M 到点 N 经过的总路程为_____.



(15) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = p$, ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, p$ 为常数), 则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”, 给出以下四个结论:

- ① $\{\sqrt{n}\}$ 不是等方差数列;
- ② 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列, 则 $\{(ka_n)^2\}$ ($k \in \mathbb{N}^*, k$ 为常数) 是等差数列;
- ③ 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列, 则 $\{a_{kn+l}\}$ ($k, l \in \mathbb{N}^*, k, l$ 为常数) 也是等方差数列;
- ④ 若 $\{a_n\}$ 既是等方差数列, 又是等差数列, 则该数列也一定是等比数列.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 道题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(16) (本小题 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 2, a_4 = 16$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

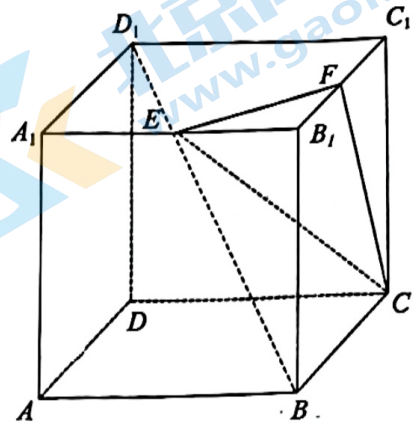
(II) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且满足 $b_2 = a_1, b_7 = a_5$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(17)(本小题 13 分)

已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, 点 E 为 A_1B_1 的中点, 点 F 为 B_1C_1 的中点.

(I) 求证: $BD_1 \perp EF$;

(II) 求二面角 $E-FC-B$ 的余弦值.



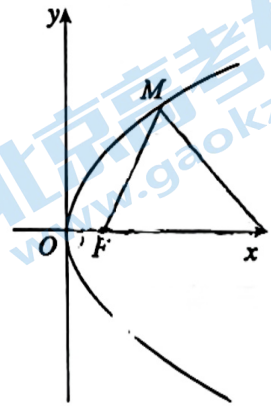
(18)(本小题 14 分)

如图, 已知 M 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, F 是抛物线 C 的焦点, 以 Fx 为始边, FM 为终边的 $\angle xFM = 60^\circ$, 且 $|FM| = 4$, l 为抛物线 C 的准线, O 为原点.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 若直线 FM 与抛物线 C 交于另一个点 N , 过 N 作 x 轴的平行

线与 l 相交于点 E . 求证: M, O, E 三点共线.



(19)(本小题 15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$, $\triangle PAD$ 是

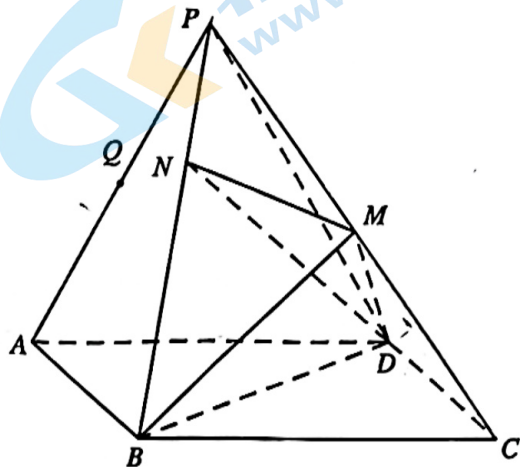
等边三角形,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, M 为 PC 的中点.

(I) 求证: $PA \parallel$ 平面 MBD ;

(II) 求 MD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值;

(III) 设点 N 在线段 PB 上,且 $\frac{PN}{PB} = \frac{1}{3}$, PA 的中

点为 Q ,判断点 Q 与平面 MND 的位置关系,并说明理由.



(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 y 轴的一个交点为 $A(0, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设过点 A 的直线 l 与椭圆 E 交于点 B , 过点 A 与 l 垂直的直线与直线 $x = 1$ 交于点 C . 若 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 求直线 l 的方程.

(21)(本小题 15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $S_n = a_k$, 则称 $\{a_n\}$ 是“ M 数列”.

(I) 判断数列 $\{3^n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是不是“ M 数列”, 并说明理由;

(II) 设 $\{b_n\}$ 是等差数列, 其首项 $b_1 = 1$, 公差 $d \in \mathbf{N}^*$, 且 $\{b_n\}$ 是“ M 数列”.

① 求 d 的值和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

② 设 $c_n = \frac{4b_n^2 + 8b_n + 29}{b_n + 1}$. 直接写出数列 $\{c_n\}$ 中最小的项.



顺义区 2023—2024 学年第一学期期末质量监测
高二数学试卷参考答案

一、选择题

BCAC DCBC BD

二、填空题

11. 24 12. 1 13. $\frac{1}{2}$ 说明: $(0, \frac{4}{3})$ 范围内的任意值
14. 24 15. ②③

三、解答题

16.(本小题共 13 分)

解: (I) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $a_1=2$, $a_4=16$, 所以 $16=2q^3$, 所以 $q=2$, 2 分

所以 $a_n=2 \times 2^{n-1}=2^n$ 4 分

(II) 等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

则 $b_2=b_1+d=2$, $b_7=b_1+6d=32$,

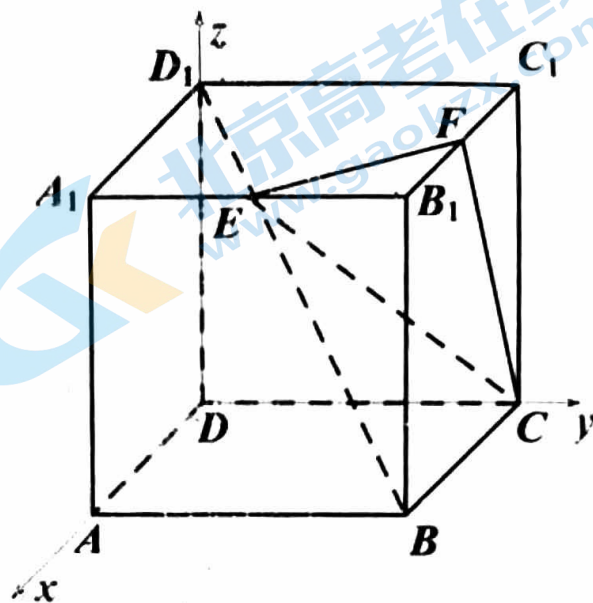
所以 $d=6$, $b_1=-4$, 8 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式为

$S_n = -4n + \frac{1}{2}n(n-1) \times 6$ 10 分

$= 3n^2 - 7n$ 13 分

17. (本小题 14 分)



(I) $\because ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体

$\therefore DA \perp DC \perp DD_1$ 两两垂直

\therefore 以 DA 为 x 轴,

以 DC 为 y 轴,

以 DD_1 为 z 轴如图建系 设 $DA=1$

$\therefore D(0,0,0) A(1,0,0) B(1,1,0) C(0,1,0)$

$D_1(0,0,1) A_1(1,0,1) B_1(1,1,1) C_1(0,1,1)$

$E(1, \frac{1}{2}, 1) F(\frac{1}{2}, 1, 1)$

$\therefore \overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1) \overrightarrow{EF} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\therefore \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$

$\therefore BD_1 \perp EF$

..... 5 分

(II) 平面 FCB 的法向量 $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$

设平面 EFC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$

$\overrightarrow{EF} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \overrightarrow{EC} = (-1, \frac{1}{2}, -1)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \overrightarrow{EC} \cdot \vec{n} = -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 1$ 得 $y = 1 \quad z = -\frac{1}{2}$

$\therefore \vec{n} = (1, 1, -\frac{1}{2})$

..... 10 分

设二面角 $E-FC-B$ 的平面角为 θ

则 $\cos\theta = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| |\vec{n}|} \right| = \frac{2}{3}$

\therefore 二面角 $E-FC-B$ 余弦值为 $\frac{2}{3}$

..... 13 分

18. (本小题 14 分)

(I) 解:

方法 1: 过 M 作 $MA \perp l$, 垂足为 A , 连结 FA .

则

$$|MA| = |FM|, \text{-----} 2 \text{分}$$

因为 $\angle xFM = 60^\circ$,

所以 $\angle FMA = 60^\circ$, $|FA| = |MA| = 4$. -----4 分

所以 $p = |FA| \cdot \sin 30^\circ = 2$. -----6 分

抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$. -----7 分

方法 2: 过 M 作 $MG \perp x$ 轴, 垂足为 G .

则 $|FG| = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$. -----2 分

设点 M 的横坐标为 x_0 .

$$\text{根据题意得: } \begin{cases} x_0 + \frac{p}{2} = 4 \\ x_0 - \frac{p}{2} = 2 \end{cases} \text{-----} 4 \text{分}$$

解得 $p = 2$. -----6 分

抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$. -----7 分

方法 3: 设点 $M(x_0, y_0)$,

则 $y_0 = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, -----2 分

$x_0 = 4 \cos 60^\circ + \frac{p}{2} = 2 + \frac{p}{2}$. -----4 分

因为 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 C 上,

所以 $2p(2 + \frac{p}{2}) = (2\sqrt{3})^2$, 化简得 $p^2 + 4p - 12 = 0$,

解得 $p = 2$ 或 $p = -6$ (舍). -----6 分

抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$. -----7 分

(II) 证明: 抛物线 C 的焦点 $F(1, 0)$, $k_{FM} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

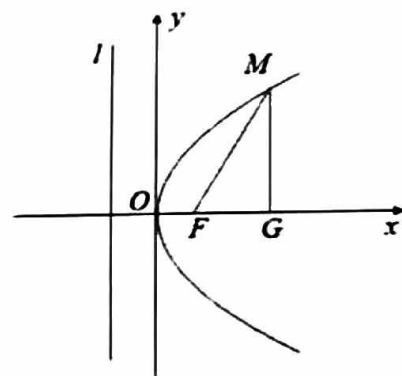
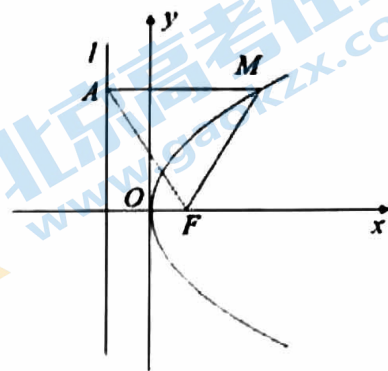
直线 FM 的方程为

$$y = \sqrt{3}(x-1). \text{-----} 9 \text{分}$$

$$\text{联立方程 } \begin{cases} y = \sqrt{3}(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得 } 3x^2 - 10x + 3 = 0, \text{-----}$$

解得

$$x_M = 3, x_N = \frac{1}{3}, \text{-----} 11 \text{分}$$



所以 $y_M = 2\sqrt{3}, y_N = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

M 点坐标为 $(3, 2\sqrt{3})$, E 点坐标为 $(-1, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$,13 分

因为 $k_{OM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, k_{OE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 M, O, E 三点共线.14 分

19. (本小题 15 分)

(I) 证明: 连 AC 交 BD 于 E , 连 ME .

$\because ABCD$ 是菱形,

$\therefore E$ 为 AC 中点.

$\because M$ 是线段 PC 中点,

$\therefore ME$ 是 $\triangle PAC$ 中位线.

$\therefore PA \parallel ME$2 分

又 $\because PA \notin$ 平面 MBD ,

$ME \subset$ 平面 MBD ,

$\therefore PA \parallel$ 平面 MBD 4 分

(II) 解: 取 AD 中点 O , 连 PO, OB

$\because \triangle PAD$ 是等边三角形,

$\therefore PO \perp AD$.

$\because ABCD$ 是菱形, $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore BO \perp AD$.

\because 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

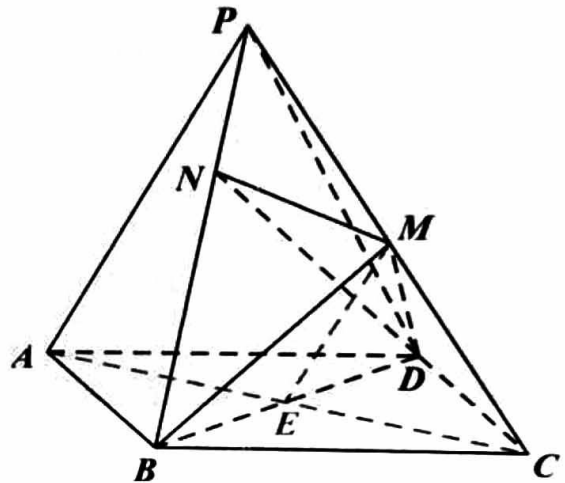
PO 在平面 PAD 内,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

$\therefore OB, OD, OP$ 两两垂直.

\therefore 以 OB 为 x 轴,

以 OD 为 y 轴,



.....5 分

.....6 分

以 OP 为 z 轴建立坐标系,如图,7 分

$\therefore O(0,0,0), A(0,-1,0), B(\sqrt{3},0,0), C(\sqrt{3},2,0),$

$D(0,1,0), P(0,0, \sqrt{3}), M(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}).$

$\therefore \overrightarrow{DM} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}).$ 8 分

\therefore 平面 ABCD 的法向量为 $\overrightarrow{OP}=(0,0, \sqrt{3}).$

设 MD 与平面 ABCD 所成角为 $\theta,$

则 $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{OP} \rangle|$

$$= \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

\therefore MD 与平面 ABCD 所成角正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

.....10 分

(III)解: 点 Q 在平面 MND 内.

.....11 分

连 DQ (MQ、NQ 都行)

$\therefore \frac{PN}{PB} = \frac{1}{3}, \therefore \overrightarrow{PN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{PB} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}).$

$\therefore \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PN} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, \frac{2\sqrt{3}}{3}).$

设平面 MND 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z),$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DN} \cdot \vec{m} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0 \\ \overrightarrow{DM} \cdot \vec{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 1$ 得 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}, z = -1,$

$\therefore \vec{m} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -1).$

.....13 分

\therefore PA 的中点为 Q, $\therefore Q(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{DQ} = (0, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$

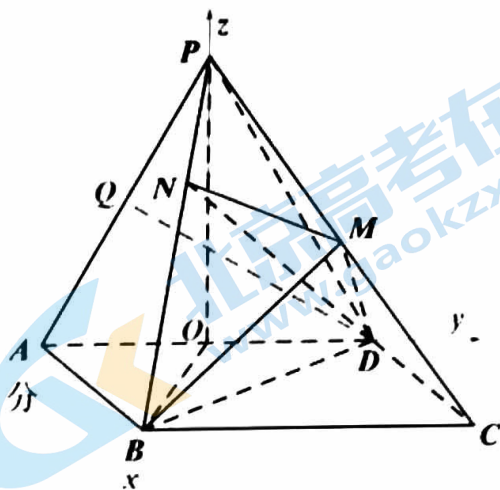
$\therefore \overrightarrow{DQ} \cdot \vec{m} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

$\therefore \overrightarrow{DQ} \perp \vec{m}.$

\therefore D 在平面 MND 内, \therefore DQ 在平面 MND 内.

\therefore 点 Q 在平面 MND 内.

.....15 分



20. (本小题 15 分)

解: (I) 由已知得
$$\begin{cases} b = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$
 ----- 3 分

解得 $a^2 = 4, b^2 = 1$. ----- 4 分

椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ----- 5 分

(II) 方法 1:

由题意可知, 直线 l 与 y 轴不垂直,

又当 l 与 x 轴垂直时, 显然 $|AB| \neq |AC|$. ----- 6 分

所以, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 1 (k \neq 0)$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, 消去 y 整理得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kx = 0$ (*).

设点 $B(x_0, y_0)$,

则由点 $A(0, 1)$ 及方程 (*) 的根与系数的关系得

$$x_0 = \frac{-8k}{1 + 4k^2}. \text{ ----- 7 分}$$

$$y_0 = kx_0 + 1 = \frac{-8k^2}{1 + 4k^2} + 1. \text{ ----- 8 分}$$

$$|AB|^2 = (x_0)^2 + (y_0 - 1)^2 = \left(\frac{-8k}{1 + 4k^2}\right)^2 + \left(\frac{-8k^2}{1 + 4k^2}\right)^2. \text{ ----- 9 分}$$

因为 $AC \perp AB$, 所以直线 AC 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + 1$, ----- 10 分

将 $x = 1$ 代入, 解得 $y = 1 - \frac{1}{k}$.

故点 C 的坐标为 $(1, 1 - \frac{1}{k})$. ----- 11 分

$$|AC|^2 = 1^2 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2 = 1 + \frac{1}{k^2}. \quad \text{-----12分}$$

由 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形知 $|AB|=|AC|$,

$$\text{即} \left(\frac{-8k}{1+4k^2}\right)^2 + \left(\frac{-8k^2}{1+4k^2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{k^2},$$

化简整理得 $64k^4 = (1+4k^2)^2$,

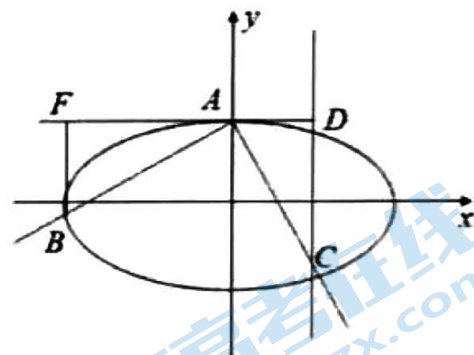
$$\text{即} 8k^2 = 1+4k^2, \text{解得} k = \pm \frac{1}{2}. \quad \text{-----14分}$$

$$\text{所以直线} l \text{的方程为} y = \frac{1}{2}x + 1 \text{或} y = -\frac{1}{2}x + 1. \quad \text{-----15分}$$

方法 2:

由题意可知, 直线 l 与 y 轴不垂直,

又当 l 与 x 轴垂直时, 显然 $|AB| \neq |AC|$. -----6分



过点 A 作直线 $x=1$ 的垂线, 垂足为 D ,

再过点 B 作直线 AD 的垂线, 垂足为 F .

因为 $AC \perp AB$, 所以 $\angle CAD + \angle BAF = 90^\circ$. -----7分

当 $|AB|=|AC|$ 时, 易判断 $\triangle ABF \cong \triangle CAD$. -----9分

所以 $|BF|=|AD|=1$. -----10分

由 $y_F=1$, 求得 $y_B=0$ -----11分

由此可知点 B 的坐标为 $(-2,0)$ 或 $(2,0)$ -----13分

直线 l 的斜率 $k = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$, -----14分

直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = -\frac{1}{2}x + 1$. -----15分

21. (本小题 15 分)

(I) 数列 $\{a_n\}$ 不是“M 数列”, 理由如下:2 分

$\because a_n = 3^n,$

当 $n=2$ 时, $S_2 = 3+9=12$, 此时找不到 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_k = 12$.

所以数列 $\{3^n\}$ 不是“M 数列”4 分

(II) ①方法一: ① $\{b_n\}$ 是等差数列, 且首项 $b_1 = 1$, 公差 $d \in \mathbb{N}^*$,

则 $b_n = 1+(n-1)d, S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d$ 5 分

故对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 总存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $n + \frac{n(n-1)}{2}d = 1+(k-1)d$ 成立,

则 $k = \frac{n-1}{d} + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$ 7 分

其中 $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ 为非负整数,

要使 $k \in \mathbb{N}^*$, 需要 $\frac{n-1}{d}$ 恒为整数, 即 d 为所有非负整数的公约数,

又 $d \in \mathbb{N}^*$, 所以 $d = 1,$ 9 分

所以 $b_n = n.$ 10 分

方法二: $\{b_n\}$ 是等差数列, 且首项 $b_1 = 1$, 公差 $d \in \mathbb{N}^*$,

则 $b_n = 1+(n-1)d$, 其前 n 项和 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d,$ 5 分

$S_1 = 1, S_2 = 2+d, S_3 = 3+3d, S_4 = 4+6d$

$a_1 = 1, a_2 = 1+d, a_3 = 1+2d, a_4 = 1+3d$ 6 分

易知 $S_2 > a_2$, 若 $S_2 \geq a_4$, 则 $2+d \geq 1+3d, \therefore d \leq \frac{1}{2}$, 不满足题意,7 分

所以 $S_2 = a_3$, 解得 $d = 1,$ 8 分

所以 $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$, 所以 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 中的项.9 分

所以 $b_n = n.$ 10 分

② $\because c_n = \frac{4b_n^2 + 8b_n + 29}{b_n + 1}.$

所以 $c_n = \frac{4n^2 + 8n + 29}{n+1} = \frac{4(n+1)^2 + 25}{n+1} = 4(n+1) + \frac{25}{n+1}$12分

当 $n+1=2$ 时, $c_n = \frac{41}{2}$; 当 $n+1=3$ 时, $c_n = \frac{61}{3}$14分

所以, 当 $n=2$ 时, c_n 有最小值 $\frac{61}{3}$.

即数列 $\{c_n\}$ 中最小的项为 $\frac{61}{3}$ 15分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜

