天一大联考

2021—2022 学年高三年级上学期期中考试

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{-2,-1,1\}$,$B=\{-1,0,1\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{-2,0,1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1\}$

2. 命题“$\exists x<0,3x^3-6x<0$”的否定为

A. $\forall x\geqslant 0,3x^3-6x>0$　　B. $\forall x<0,3x^3-6x\geqslant 0$

C. $\exists x\geqslant 0,3x^3-6x\leqslant 0$　　D. $\exists x<0,3x^3-6x\geqslant 0$

3. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,则下列命题中,正确的是

A. 若 $a^4>b^4$,则 $a>b$　　B. 若 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$,则 $a>b$

C. 若 $a>b,c>d$,则 $ac>bd$　　D. 若 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$,则 $a<b$

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1+a_2=2,a_4+a_5=16$,则 $\{a_n\}$ 的公比为

A. -2　　B. 1　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

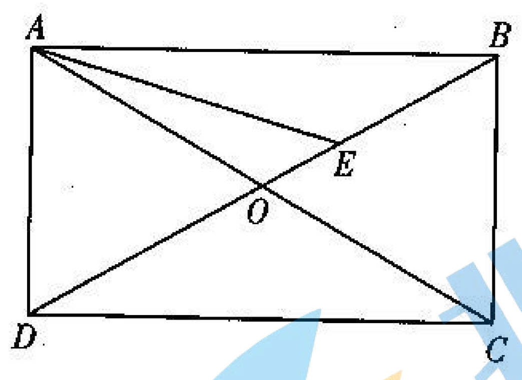
5. 曲线 $y=xe^{x+1}$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线斜率为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

6. 下列区间一定包含函数 $f(x)=\sin 2x+\sin x-\frac{x}{2}$ 的零点的是

A. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

7. 如图所示,矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,点 E 在线段 OB 上且 $OE=\frac{1}{3}OB$,若 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,则 $\lambda-\mu=$

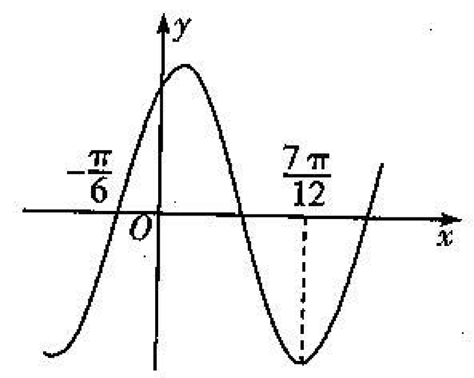


A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n,已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,且 $b_n=\frac{a_n+n^2}{a_n}$,$a_3=3,b_4+b_5=11$,则 $S_n+T_n=$

A. n^2-2n　　B. $2n^2-n$　　C. $2n^2+n$　　D. n^2+2n

9. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega\in\mathbf{R},-2\pi<\varphi<2\pi)$ 的部分图象大致如图所示,则 $\omega\cdot\varphi$ 的最大值为



A. $\frac{10\pi}{3}$　　B. $\frac{8\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=x^2+bx(b\in\mathbf{R})$,则“$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增”是“$f(f(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$,且当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)=-\ln x$,则

A. $f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)>f(3^4)>f(\log_3 4)$　　B. $f(3^4)>f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)>f(\log_3 4)$

C. $f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)>f(\log_3 4)>f(3^4)$　　D. $f(3^4)>f(\log_3 4)>f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)$

12. 已知实数 x,y,z 满足 $x^2+4y^2-z=0$,则当 $z-6x-12y+4xy$ 取得最小值时,z 的最小值为

A. 0　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 5

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x-6,3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2)$,且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则实数 $x=$________.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-4\leqslant 0,\\ x-y-2\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的最小值为________.

15. 已知 $\alpha\in(\pi,2\pi)$,$\cos\alpha-3\sin\alpha=1$,则 $\cos\frac{\alpha}{2}=$________.

16. 某项测试有 30 道必答题,甲和乙参加该测试,分别用数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 记录他们的成绩.若第 k 题甲答对,则 $a_k=2$,若第 k 题甲答错,则 $a_k=-1$;若第 k 题乙答对,则 $b_k=2$,若第 k 题乙答错,则 $b_k=-1$.已知 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{30}b_{30}=75$,且只有 1 题甲和乙均答错,则甲至少答对________道题.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)=1+4\sqrt{3}\sin x\cos x\cos 2x-2\cos^2 2x$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(Ⅱ)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 时,求函数 $f(x)$ 的值域.

18. (12 分)

设$\{a_n\}$是公比为负数的等比数列,$3a_1$ 为 a_2,a_3 的等差中项,$a_5=-243$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设 $b_n=a_{2n}+a_{2n-1}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=3a_n-6n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)证明:数列$\{a_n+3\}$为等比数列;

(Ⅱ)若数列$\{b_n\}$为等差数列,且 $b_3=a_1$,$b_{12}=a_2$,求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n.

20. (12 分)

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $a\cos C-c\cos(B+C)=-\frac{b}{3\cos(A+B)}$.

(Ⅰ)求 $\tan C$;

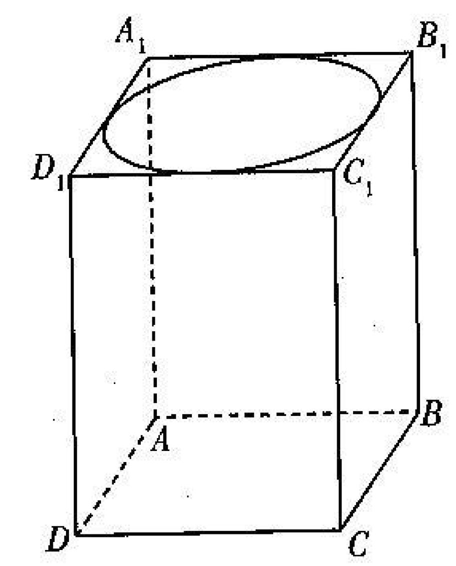
(Ⅱ)若 $c=3$,$\sin A\sin B=\frac{16}{27}$,求$\triangle ABC$ 的面积.

21. (12 分)

如图所示是一个长方体容器,长方体的上、下底面为正方形,容器顶部是一个圆形的盖子,圆与上底面四条边都相切,该容器除了盖子以外的部分均用铁皮制作,共使用铁皮的面积为 16 dm^2. 假设圆形盖子的半径为 r dm,该容器的容积为 V dm^3,铁皮厚度忽略不计.

(Ⅰ)求 V 关于 r 的函数关系式;

(Ⅱ)该容器的高 AA_1 为多少分米时,V 取最大值?



22. (12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{(a+1)\ln x+a-1}{x}$,$g(x)=a-\frac{1}{x^2}$.

(Ⅰ)讨论函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上的单调性;

(Ⅱ)若当 $x>1$ 时,$y=f(x)$ 的图象恒在 $y=g(x)$ 的图象的下方,求实数 a 的取值范围.

天一大联考
2021—2022 学年高三年级上学期期中考试
文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　由已知得,$A\cup B=\{-2,-1,0,1\}$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查特称命题的否定.

解析　根据特称命题的否定是全称命题知,命题"$\exists x<0,3x^3-6x<0$"的否定是:"$\forall x<0,3x^3-6x\geqslant 0$".

3. 答案　D

命题意图　本题考查不等式的性质.

解析　对于 A,若 $a=-2,b=1$,则 $a<b$,所以 A 项错误;对于 B,若 $c<0$,则不满足 $a>b$,所以 B 项错误;对于 C,若 $a=-1,b=-2,c=-3,d=-4$,则满足 $a>b,c>d$,而此时 $ac=3<bd=8$,所以 C 项错误;对于 D,因为$\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$,$c^2>0$,所以 $a<b$,所以 D 项正确.

4. 答案　C

命题意图　本题考查等比数列的概念.

解析　设公比为 q,则 $a_4+a_5=q^3(a_1+a_2)$,所以 $q^3=8$,故 $q=2$.

5. 答案　B

命题意图　本题考查导数的几何意义.

解析　由条件得 $y'=e^{x+1}+xe^{x+1}$,当 $x=-1$ 时,$y'=0$,即曲线 $y=xe^{x+1}$ 在点$(-1,-1)$处的切线斜率为 0.

6. 答案　C

命题意图　本题考查零点存在性定理的应用.

解析　因为$f(0)=0$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{8}>0$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}>0$,$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{8}=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{8}<0$,$f(\pi)=-\frac{\pi}{2}<0$,所以区间$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$一定包含$f(x)$的零点.

7. 答案　A

命题意图　本题考查平面向量的线性运算.

解析　因为四边形 $ABCD$ 为矩形,$OE=\frac{1}{3}OB$,所以$\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$,所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,因为$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,所以 $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$,所以 $\lambda-\mu=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

故选 A.

8. 答案　D

命题意图　本题考查数列的通项公式与求和.

解析　由 $a_3=3$,得 $b_3=\frac{a_3+3^2}{a_3}=\frac{3+3^2}{3}=4$,设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d,则由$\begin{cases}b_3=4,\\b_4+b_5=11,\end{cases}$得$\begin{cases}b_1+2d=4,\\2b_1+7d=11,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=2,\\d=1,\end{cases}$所以 $b_n=2+(n-1)\times1=n+1$. 则 $b_n=\frac{a_n+n^2}{a_n}=n+1$,所以 $a_n=n$. 所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$,则 $S_n+T_n=n^2+2n$.

9. **答案**　B

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　设 $f(x)$ 的最小正周期为 T,由图象知$\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}$,解得 $T=\pi$,所以 $\omega=\pm2$. 当 $\omega=2$ 时,令 $2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$或$-\frac{5\pi}{3}$. 当 $\omega=-2$ 时,令 $-2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$或$-\frac{4\pi}{3}$. 因此 $\omega\cdot\varphi$ 的所有可能取值为$\frac{2\pi}{3}$,$-\frac{10\pi}{3}$,$-\frac{4\pi}{3}$,$\frac{8\pi}{3}$,最大值为$\frac{8\pi}{3}$.

10. **答案**　C

命题意图　本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析　若 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,则 $b\geqslant0$,所以当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,所以 $f(f(x))$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,即充分性成立. 若 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上不是单调递增,则 $b<0$,$f(f(x))=(x^2+bx)^2+b(x^2+bx)=(x^2+bx)\cdot(x^2+bx+b)$,易知 $y=x^2+bx$ 有零点 0 和 $-b$,$y=x^2+bx+b$ 有一正一负两个零点,且正零点不等于 $-b$,于是 $f(f(x))$ 在$(0,+\infty)$上有两个零点,所以 $f(f(x))$ 在$(0,+\infty)$上不可能单调递增,所以必要性也成立.

11. **答案**　A

命题意图　本题考查函数的奇偶性、周期性和单调性的综合应用.

解析　由题意知 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,即 $f(x)$ 的周期为 4,所以 $f(3^4)=f(81)=f(1)=-\ln 1=0$;$f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)=f(-\log_4 3)=f(\log_4 3)$,因为 $\log_4 3\in(0,1)$,所以 $f(\log_4 3)>0$;$f(\log_3 4)=-f(\log_3 4-2)=-f(2-\log_3 4)$,因为 $2-\log_3 4\in(0,1)$,所以 $-f(2-\log_3 4)<0$. 综上可得 $f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)>f(3^4)>f(\log_3 4)$.

12. **答案**　C

命题意图　本题考查基本不等式的应用.

解析　$z-6x-12y+4xy=x^2+4xy+4y^2-6x-12y=(x+2y-3)^2-9$,当 $x+2y=3$ 时,该式取得最小值,则 $z=x^2+4y^2\geqslant\frac{(x+2y)^2}{2}=\frac{9}{2}$,当且仅当 $x=2y$,即 $x=\frac{3}{2}$,$y=\frac{3}{4}$时等号成立.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案**　0

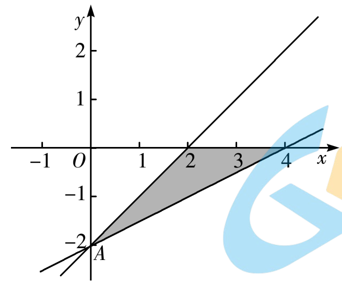
命题意图　本题考查共线向量的定义.

解析　由向量平行的充要条件,得$(x-6)\times(-2)-4\times3=0$,解得 $x=0$.

14. **答案**　4

命题意图　本题考查简单的线性规划问题.

解析　作出不等式组表示的平面区域，如图阴影部分所示，由 $z=3x-2y$ 得 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$，由图可知，当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 经过点 $A(0,-2)$ 时，z 取得最小值 4.



15. **答案**　$-\frac{\sqrt{10}}{10}$

命题意图　本题考查三角恒等变换的应用.

解析　因为 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，由 $\cos\alpha-3\sin\alpha=1$ 可得 $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=1$，整理可得 $\sin\frac{\alpha}{2}=-3\cos\frac{\alpha}{2}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=-3$，所以 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. **答案**　22

命题意图　本题考查数列的概念，创新题型.

解析　设甲和乙均答对的题数为 x，则甲和乙中恰有 1 人答对的题数为 $29-x$，根据题意，若第 k 题甲和乙均答对，则 $a_kb_k=4$，若第 k 题甲和乙恰有 1 人答对，则 $a_kb_k=-2$，若第 k 题甲和乙均答错，则 $a_kb_k=1$，所以 $4x-2\times(29-x)+1=75$，解得 $x=22$，即甲和乙有 22 题均答对，剩余题目甲可能都答错，故他至少答对 22 道题.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查三角恒等变换以及三角函数的图象与性质.

解析　（Ⅰ）$f(x)=1+4\sqrt{3}\sin x\cos x\cos 2x-2\cos^2 2x$

$=1+2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-2\cos^2 2x$

$=\sqrt{3}\sin 4x-\cos 4x$

$=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$，…………（4 分）

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. …………（5 分）

（Ⅱ）由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 知 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，…………（7 分）

则 $\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，…………（8 分）

则 $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,1]$，

故函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2,1]$. …………（10 分）

18. **命题意图**　本题考查等差数列和等比数列的性质，数列求和.

解析　（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q<0)$.

因为 $3a_1$ 为 a_2, a_3 的等差中项，

所以 $6a_1 = a_2 + a_3$，即 $6a_1 = a_1 q + a_1 q^2$，…………（2 分）

又因为 $a_1 \neq 0$，所以 $6 = q + q^2$，即 $q^2 + q - 6 = 0$，…………（4 分）

所以 $q = -3$（正值舍去）．…………（6 分）

所以 $a_n = a_5 q^{n-5} = -243 \times (-3)^{n-5} = (-3)^n$．…………（8 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n = a_{2n} + a_{2n-1} = (-3)^{2n} + (-3)^{2n-1} = 9^n - \dfrac{9^n}{3} = \dfrac{2}{3} \times 9^n$，…………（10 分）

所以 $\{b_n\}$ 是以 6 为首项，9 为公比的等比数列，

所以 $T_n = \dfrac{6 \times (1 - 9^n)}{1 - 9} = \dfrac{3}{4} \times (9^n - 1)$．…………（12 分）

19. **命题意图**　本题考查递推数列的有关问题，以及裂项求和．

解析　（Ⅰ）当 $n = 1$ 时，$2a_1 = 3a_1 - 6$，$\therefore a_1 = 6$．…………（1 分）

$\because 2S_n = 3a_n - 6n (n \in \mathbf{N}^*)$，$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时，$2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 6(n-1)$，

$\therefore 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1} - 6$，…………（3 分）

$\therefore a_n + 3 = 3(a_{n-1} + 3)$，…………（5 分）

$\therefore$ 数列 $\{a_n + 3\}$ 是以 $a_1 + 3 = 9$ 为首项、以 3 为公比的等比数列．…………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$a_n + 3 = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$，即 $a_n = 3^{n+1} - 3$，

$\therefore b_3 = a_1 = 6$，$b_{12} = a_2 = 3^3 - 3 = 24$．…………（7 分）

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则 $b_1 + 2d = 6$，$b_1 + 11d = 24$，

$\therefore b_1 = d = 2$，$\therefore b_n = 2n$，…………（9 分）

$\therefore \dfrac{1}{b_n b_{n+1}} = \dfrac{1}{2n \times 2(n+1)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$，…………（10 分）

$\therefore T_n = \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)\right] = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{n}{4n+4}$．…………（12 分）

20. **命题意图**　本题考查三角恒等变换、正弦定理与余弦定理的应用．

解析　（Ⅰ）由 $a\cos C - c\cos(B + C) = -\dfrac{b}{3\cos(A + B)}$，得 $a\cos C + c\cos A = \dfrac{b}{3\cos C}$，…………（1 分）

由正弦定理得 $\sin A\cos C + \sin C\cos A = \dfrac{\sin B}{3\cos C}$，…………（2 分）

所以 $\sin(A + C) = \dfrac{\sin B}{3\cos C}$，…………（3 分）

所以 $\sin B = \dfrac{\sin B}{3\cos C}$，…………（4 分）

又 $\sin B \neq 0$，所以 $\cos C = \dfrac{1}{3}$．…………（5 分）

所以 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\tan C = \dfrac{\sin C}{\cos C} = 2\sqrt{2}$．…………（6 分）

（Ⅱ）若 $c = 3$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$，得 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$，…………（7 分）

则 $a=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A, b=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B$, …………………………………………………………（8 分）

则 $ab=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B=\frac{162}{16}\sin A\sin B=\frac{162}{16}\times\frac{16}{27}=6$, …………………………………（10 分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$. ………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查函数模型以及导数的应用.

解析 （Ⅰ）设 $AA_1=a$ dm.

由题意得 $(2r)^2-\pi r^2+(2r)^2+8ar=16$, ……………………………………………………………（1 分）

可得 $a=\frac{16+(\pi-8)r^2}{8r}$, ……………………………………………………………………………（2 分）

所以 $V=(2r)^2a=8r+\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^3$. …………………………………………………………………（3 分）

由 $a>0$，得 $\frac{16+(\pi-8)r^2}{8r}>0$，解得 $0<r<\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}$. …………………………………………………（5 分）

因此 $V=8r+\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^3, r\in\left(0,\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}\right)$. ……………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）$V'=8+3\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^2$,

令 $V'>0$，得 $0<r<\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}$；令 $V'<0$，得 $\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}<r<\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}$,

所以 V 在 $\left(0,\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}},\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}\right)$ 上单调递减，…………………（8 分）

所以当 $r=\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}$ 时，V 取最大值，此时 $a=\frac{\sqrt{3(8-\pi)}}{3}$,

即该容器的高 AA_1 为 $\frac{\sqrt{3(8-\pi)}}{3}$ dm 时，V 取最大值. ………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=\frac{2-(a+1)\ln x}{x^2}$, ……………………………………………………………（1 分）

（ⅰ）若 $a+1>0$，令 $f'(x)<0$，得 $(a+1)\ln x>2$，可得 $x>e^{\frac{2}{a+1}}$；令 $f'(x)>0$，得 $(a+1)\ln x<2$，可得 $x<e^{\frac{2}{a+1}}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{2}{a+1}})$ 上单调递增，在 $(e^{\frac{2}{a+1}},+\infty)$ 上单调递减.

（ⅱ）若 $a+1<0$，令 $f'(x)<0$，得 $(a+1)\ln x>2$，可得 $x<e^{\frac{2}{a+1}}$；令 $f'(x)>0$，得 $(a+1)\ln x<2$，可得 $x>e^{\frac{2}{a+1}}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{2}{a+1}})$ 上单调递减，在 $(e^{\frac{2}{a+1}},+\infty)$ 上单调递增.

（ⅲ）若 $a+1=0$，则 $f'(x)=\frac{2}{x^2}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………（6 分）

（Ⅱ）当 $x>1$ 时，$y=f(x)$ 的图象恒在 $y=g(x)$ 的图象的下方，等价于 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

由 $f(x)<g(x)$ 可得 $\frac{(a+1)\ln x+a-1}{x}<a-\frac{1}{x^2}$，整理可得 $(a+1)\ln x+\frac{1}{x}-ax+a-1<0$.

设 $h(x)=(a+1)\ln x+\frac{1}{x}-ax+a-1$,

则 $h'(x)=\frac{a+1}{x}-\frac{1}{x^2}-a=\frac{(1-x)(ax-1)}{x^2}$, ………………………………………………………（8 分）

①当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $h'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，又因为 $h(1)=0$，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，总有 $h(x)>0$，不符合题意； ………………………………………… (9 分)

②当 $a\geqslant 1$ 时，因为 $h'(x)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，又因为 $h(1)=0$，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，总有 $h(x)<0$，符合题意； ………………………………………… (10 分)

③当 $0<a<1$ 时，令 $h'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a}$，易知 $h(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right]$ 上是增函数，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上是减函数，

又因为 $h(1)=0$，所以当 $x\in\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，总有 $h(x)>0$，不符合题意. ………………………… (11 分)

综上，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ………………………………………… (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯