丰台区 2022～2023 学年度第一学期期末练习参考答案

高三数学

2023. 01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	B	A	D	C	A	C	B	C

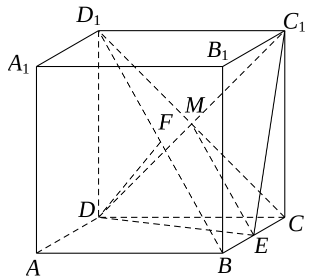
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．$[-1,0)\cup(0,+\infty)$　　12．-2；5　　13．$(0,4)$

14．4　　15．①④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题 13 分）



（Ⅰ）证明：连接 CD_1，交 DC_1 于点 M，

依题意知，四边形 CDD_1C_1 为正方形，所以 M 是线段 CD_1 的中点，

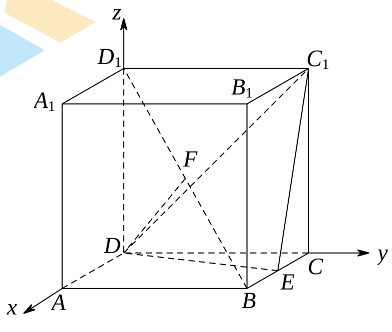
连接 EM，因为 E 为棱 BC 的中点，

所以 $EM//BD_1$，

因为 $EM\subset$ 平面 DC_1E，$BD_1\not\subset$ 平面 DC_1E，

所以 $BD_1//$ 平面 DC_1E．　　………………5 分

（Ⅱ）解：设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,



以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，$C(0,1,0)$，

因为点 F 是线段 BD_1 的中点，E 为棱 BC 的中点，

所以 $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$E(\frac{1}{2},1,0)$，

所以 $\overrightarrow{DF}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{1}{2},1,0)$.

设 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$ 是平面 DC_1E 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DC_1}=y+z=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}x+y=0.\end{cases}$$

取 $y=1$，则 $x=-2$， $z=-1$.

于是 $\boldsymbol{u}=(1,-2,-1)$ 是平面 DC_1E 的一个法向量.

设直线 DF 与平面 DC_1E 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{DF},\boldsymbol{u}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{u}\right|}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\cdot\left|\boldsymbol{u}\right|}=\dfrac{\left|\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

所以直线 DF 与平面 DC_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ………………13分

17.（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）在△ABC中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $a\sin B=b\sin A$，

因为 $2a\sin B=\sqrt{2}b$

所以 $2b\sin A=\sqrt{2}b$，

因为 $b\neq 0$，

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $A=\dfrac{3\pi}{4}$； ………………7分

（Ⅱ）若选择①，

在 $\triangle ABC$ 中， $0<C<\pi$，

因为 $\cos C=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

又因为 $A=\dfrac{\pi}{4}$， $A+B+C=\pi$

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos C+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin C$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-\frac{\sqrt{10}}{10})+\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{3\sqrt{10}}{10})=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

在△ABC中，由正弦定理可得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=6$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$． ………………14 分

若选择②，

在△ABC 中，因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，

因为 a=2，$b=2\sqrt{2}$，$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=1$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，

所以 $b^2=a^2+c^2$，所以 $c^2=b^2-a^2=4$，

所以 $c=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$．

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意 $10(0.004+0.012+0.014+a+0.024+0.028)=1$

所以 $a=0.018$； ………………3 分

（Ⅱ）记“一位非遗短视频粉丝的年龄不超过 40 岁”为事件 A，

$P(A)=10(0.004+0.012+0.014)=0.3$，

所以估计一位非遗短视频粉丝的年龄不超过 40 岁的概率为 0.3.

X 可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=C_2^0 0.7^2=0.49$；

$P(X=1)=C_2^1 0.3\times 0.7=0.42$；

$P(X=2)=C_2^2 0.3^2=0.09$．

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.49	0.42	0.09

$E(X)=0\times 0.49+1\times 0.42+2\times 0.09=0.6$． ………………11 分

（或因为 $X\sim B(2,0.3)$，所以 $E(X)=2\times 0.3=0.6$）

（Ⅲ）$m<n$． ………………14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$

解得 $a^2=4$， $b^2=2$.

所以椭圆 E 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………5 分

（Ⅱ）因为 $A(-2,0)$， $P(2,m)$，所以直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{m}{4}(x+2)$（ $m>0$ ）.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{m}{4}(x+2) \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 得 $(m^2+8)x^2+4m^2x+4m^2-32=0$，

即 $(x+2)[(m^2+8)x+(2m^2-16)]=0$.

因为点 A 的横坐标为 -2，所以点 C 的横坐标为 $x=-\dfrac{2m^2-16}{m^2+8}$，

代入直线 AP 的方程可得点 C 的纵坐标为 $y=\dfrac{m}{4}(-\dfrac{2m^2-16}{m^2+8}+2)=\dfrac{8m}{m^2+8}$，

即 $C(-\dfrac{2m^2-16}{m^2+8},\dfrac{8m}{m^2+8})$.

又点 B 的坐标为 $(2,0)$，

所以 $k_2=\dfrac{\dfrac{8m}{m^2+8}}{-\dfrac{2m^2-16}{m^2+8}-2}=-\dfrac{2}{m}$，

又因为 $k_1=\dfrac{m}{2}$， 所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{m}{2}\cdot(-\dfrac{2}{m})=-1$.

即 $k_1\cdot k_2$ 为定值 -1. ………………15 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得， $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\cos x$， 所以 $f'(1)=1+\cos 1$，

又 $f(1)=\sin 1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\sin 1=(1+\cos 1)(x-1)$，

即 $y=(1+\cos 1)x+\sin 1-\cos 1-1$； ………………4 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\cos x$，

因为 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=\cos x$ 均在区间因为 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，

所以 $f'(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，

因为 $f'(1)=1+\cos 1>0$， $f'(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\cos\mathrm{e}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{2}<0$，

所以 $f'(x)=0$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上有且只有一个零点，记为 x_0，

所以 $x\in[1,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(x_0,\mathrm{e}]$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,x_0)$ 上单调递增，在区间 $(x_0,\mathrm{e}]$ 上单调递减.

因为 $f(1)=\sin 1, f(\mathrm{e})=1+\sin\mathrm{e}$，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值为 $\sin 1$.

………………10 分

（III）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x>0\}$，

由（II）知，$f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值 $\sin 1>0$，

又当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f(x)>\ln\mathrm{e}+\sin x=1+\sin x>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上没有零点；

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，

因为 $f(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=-1+\sin\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0, f(1)=\sin 1>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上仅存在一个零点；

综上所述，函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点. ………………15 分

21.（本小题 14 分）

解：（I）数列 A 是 $P(2)$ 数列，

数列 B 不是 $P(2)$ 数列. ………………3 分

（II）不存在正实数 λ，使得数列 $\{b_n\}$ 是 $P(\lambda)$ 数列.

说明理由如下：假设存在正实数 λ，使得数列 $\{b_n\}$ 是 $P(\lambda)$ 数列 .

则 $b_{n+1}\ge b_n+\lambda$，$n\in\mathbf{N}^*$.

因为 $b_{n+1}=b_n+\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，

当 $n>\dfrac{1}{\lambda^2}$ 时，$b_{n+1}-b_n<\lambda$，这与假设矛盾.

所以不存在正实数 λ，使得数列 $\{b_n\}$ 是 $P(\lambda)$ 数列. ………………7 分

（III）因为数列 $\{a_n\}$ 是 $P(1)$ 数列，则 $a_{n+1}\ge a_n+1$，

所以 $a_m\ge a_{m-1}+1\ge a_{m-2}+2\ge\cdots\ge a_1+(m-1)\ge m$

所以 $a_{m-1}\le a_m-1$，$a_{m-2}\le a_{m-1}-1\le a_m-2$，$a_{m-3}\le a_{m-2}-1\le a_m-3$，……，

$a_2\le a_3-1\le a_m-(m-2)$，$a_1\le a_2-1\le a_m-(m-1)$

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m\le ma_m-[1+2+3+\cdots+(m-1)]=ma_m-\dfrac{m(m-1)}{2}$

即 $150\le ma_m-\dfrac{m(m-1)}{2}$

所以 $a_m\ge\dfrac{150}{m}+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{2}$，

所以 $a_m+m\ge\dfrac{150}{m}+\dfrac{3m}{2}-\dfrac{1}{2}\ge 2\sqrt{\dfrac{150}{m}\times\dfrac{3m}{2}}=30-\dfrac{1}{2}$，

所以 a_m+m 的最小值不小于 30.

假设 $a_m+m=30$，必有 $\dfrac{150}{m}+\dfrac{3m}{2}-\dfrac{1}{2}\le 30$，

解得 $\dfrac{25}{3}\le m\le 12$，

因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m=9,10,11,12$，

当 m=9 时，a_m=21，存在满足条件的数列

$a_1=10,a_2=14,a_3=15,a_4=16,a_5=17,a_6=18,a_7=19,a_8=20,a_9=21$ ；

当 m=10 时，a_m=20，存在满足条件的数列

$a_1=6,a_2=12,a_3=13,a_4=14,a_5=15,a_6=16,a_7=17,a_8=18,a_9=19,a_{10}=20$；

当 m=11 时，a_m=19，存在满足条件的数列

$a_1=5,a_2=10,a_3=11,a_4=12,a_5=13,a_6=14,a_7=15,a_8=16,a_9=17,$

$a_{10}=18,a_{11}=19$；

当 m=12 时，a_m=18，存在满足条件的数列

$a_1=7,a_2=8,a_3=9,a_4=10,a_5=11,a_6=12,a_7=13,a_8=14,a_9=15,a_{10}=16,$

$a_{11}=17,a_{12}=18$.

以上都是 a_m+m=30 的充分条件.

所以 a_m+m 的最小值为 30，此时 a_m 的所有可能取值为 18，19，20，21. …14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。