北京市八一学校 2022～2023 学年度第二学期期中试卷

高二 数学

本试卷共 4 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

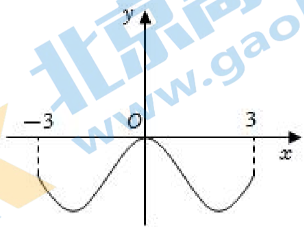
第一部分（选择题 共 50 分）

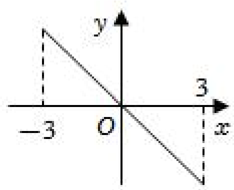
一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$，若 $a_2=5$，$a_4=9$，则公差为（ ）

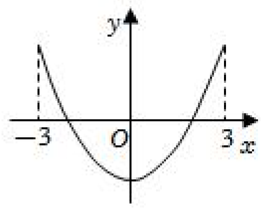
A. -2　　B. 4　　C. 1　　D. 2

2. 已知函数 $f(x)$ 的图像如图所示，则导函数 $f'(x)$ 的图象可能是（ ）

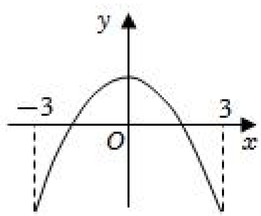




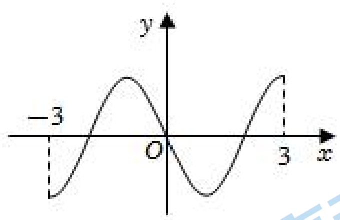
A.



B.



C.



D.

3. 函数 $f(x)=\cos x+\frac{1}{x}$ 的导数为（ ）

A. $\cos x-\frac{1}{x^2}$　B. $-\sin x+\frac{1}{x^2}$　C. $-\sin x-\frac{1}{x^2}$　D. $\sin x-\frac{1}{x^2}$

4. 从 0，2 中选一个数字.从 1，3，5 中选两个数字,组成无重复数字的三位数，其中奇数的个数为（ ）

A. 24　　B. 18　　C. 12　　D. 6

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=4n^2-10n$，则 $a_2a_6=$（ ）

A. 52　　B. 68　　C. 96　　D. 108

6. 设函数 $f(x)=x^2+ax$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=1$，则 $a=$（ ）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. -1

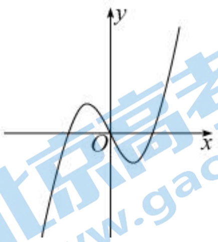
7. 有一种细菌和一种病毒，每个细菌在每一秒末杀死一个病毒的同时将自身分裂为 3 个，现在有一个这样的细菌和 110 个这样的病毒，问细菌将病毒全部杀死至少需要(　)

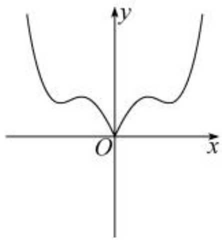
A. 4 秒钟　　B. 5 秒钟　　C. 6 秒钟　　D. 7 秒钟

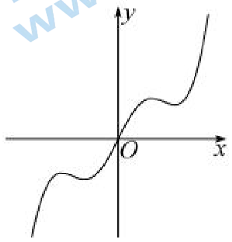
8. 函数$f(x)=ax-\ln x\geq 0(a\in R)$恒成立的一个必要不充分条件是 (　)

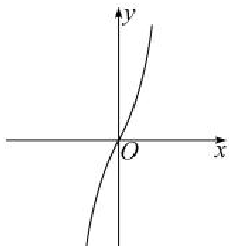
A. $a\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$　　B. $a\in[0,+\infty)$　　C. $a\in[1,+\infty)$　　D. $a\in(-\infty,e]$

9. 函数$f(x)=\frac{x^3}{3}+\sin x$的图象大致是 (　)

A.


B.


C.


D.


10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\geqslant 0,\\ -2|x+1|+2, x<0,\end{cases}$ 若存在唯一的整数 x，使得 $\frac{x-a}{3f(x)-2}<0$ 成立，则所有满足条件的整数 a 的取值集合为

A. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　B. $\{-2,-1,0,1\}$　　C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

第二部分（非选择题　共 70 分）

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. $A_5^2=$________

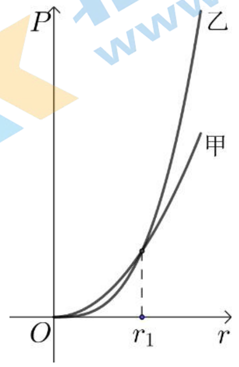
12. 在 1 和 9 之间插入三个数, 使这五个数组成正项等比数列, 则中间三个数的积等于_____.

13. 把 5 件不同产品摆成一排, 若产品 A 与产品 B 不相邻, 则不同的摆法有____________种.

14. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+\frac{k}{n}$，若对任意的$n\in N_+$，都有$a_n\geq a_3$，则实数k的取值范围是_____.

15. 某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料.每个瓶子的造价 P_1（单位：元）、瓶内饮料的获利 P_2（单位：元）分别与瓶子的半径 r（单位：cm，$r\leq 5$）之间的关系如图甲、乙所示.

设制造商的利润为 $f(r)=P_2-P_1$，给出下列四个结论：



①当 $r\in(0,r_1)$ 时，$f(r)<0$；

② $f(r)$ 在区间 $(r_1,5)$ 上单调递减；

③ $f(r)$ 在区间 $(0,r_1)$ 上存在极小值；

④ $f'(r)$ 在区间 $(0,r_1)$ 上存在极小值.

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题（本大题共 4 小题，共 45 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.(本小题 8 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_2=9$，请从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，解决下面的问题：

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n-3}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

条件①：$a_4=7$；

条件②：$S_4=22$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17.(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间.

18.(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=xe^{x}-ax(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求点（$0,f(0)$处的切线方程。

（Ⅱ）若 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，求实数 a 的取值范围；

(Ⅲ）判断当 $a\geqslant 0$ 时，是否存在三个实数 $x_1<x_2<x_3$，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，并说明理由.

19.(本小题 9 分)

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，记$c_n=max\{b_1-a_1n,b_2-a_2n,\ldots,b_n-a_nn\}(n=1，2，3，\ldots)$，其中$max\{x_1,x_2,\ldots,x_s\}$表示$x_1$，$x_2$，…，$x_s$这$s$个数中最大的数.

（Ⅰ）若$a_n=n$，$b_n=2n-1$，求c_1，c_2，c_3的值，并证明$\{c_n\}$是等差数列；

（Ⅱ）证明：或者对任意正数M，存在正整数m，当$n\geq m$时，$\frac{c_n}{n}>M$；或者存在正整数m，使得c_m，c_{m+1}，c_{m+2}，…是等差数列.

北京市八一学校 2022～2023 学年度第二学期期中试卷

高二 数学

制卷人 王娜　　审卷人　王明辉

评分标准

本试卷共 4 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

DDCBB　DBBDB

第二部分（非选择题　共 70 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 10；　12. 27；　13. 72；　14. [6,12]；　15. ①③④

16.（本小题 8 分）

（Ⅰ）设公差为 d，

因为 $S_2=9$，$a_4=7$，所以 $\begin{cases}2a_1+d=9\\ a_1+3d=7\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=4\\ d=1\end{cases}$，　所以 $a_n=n+3,(n\in\mathbf{N}^*)$.　………………5分

（Ⅱ）因为 $b_n=2^{a_n-3}$，所以 $b_n=2^{a_n-3}=2^n$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以2为首项，2为公比的等比数列，　………………6分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=2\left(2^n-1\right)=2^{n+1}-2$　………………8 分

选择条件②（评分标准同上）：

（Ⅰ）设公差为 d，因为 $S_2=9$，$S_4=22$，

所以 $\begin{cases}2a_1+d=9\\ 4a_1+6d=22\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=4\\ d=1\end{cases}$，所以 $a_n=n+3,(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅱ）与选择条件①时的第（Ⅱ）问答案相同.

17.(本小题 14 分)

解：（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f(x)=x^3-4x^2+4x$，　　…………………1 分

$f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$.　　…………………2 分

令 $f'(x)=0$ 得，$x=\frac{2}{3}$ 或 $x=2$.　　…………………3 分

当 x 在区间 $[1,3]$ 上变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(1,2)$	2	$(2,3)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增

因为 $f(1)=1,f(3)=3$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值为 3，最小值为 0.　　…………………7 分

（Ⅱ）$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$，　　…………………8 分

令 $f'(x)=0$ 得，$x=\frac{a}{3}$ 或 $x=a$，　　…………………9 分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geq 0$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\mathbf{R}$，无单调递减区间；

…………………10 分

当 $a>0$ 时，$\frac{a}{3}<a$，随着 x 的变化，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty,\ \frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3},a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	$\frac{4a^3}{27}$	单调递减	0	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ \frac{a}{3})$，$(a,+\infty)$；$f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{a}{3},a)$.

当 $a<0$ 时，$\frac{a}{3}>a$，随着 x 的变化，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty,\ a)$	a	$(a,\ \frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	0	单调递减	$\frac{4a^3}{27}$	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ a)$，$(\frac{a}{3},+\infty)$；$f(x)$ 的单调递减区间为 $(a,\ \frac{a}{3})$.

…………………14 分

18.(本小题 14 分)

解：(Ⅰ) 当 $a=1$ 时，因为 $f(x)=xe^x-x$，定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $f'(x)=(x+1)e^x-1$，则 $f'(0)=0$.

又因为$f(0)=0$，所以切线方程为$y=0$……………4 分

(Ⅱ) 因为 $f(x)=xe^x-ax(a\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x-a$.

令 $g(x)=(x+1)e^x-a$，则 $g'(x)=(x+2)e^x$.

令 $g'(x)=0$，则 $x=-2$.

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减；

当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(-2)=-\dfrac{1}{e^2}-a$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立.

则 $g(x)_{\min}\geqslant 0$，得 $a\leqslant -\dfrac{1}{e^2}$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-\dfrac{1}{e^2}]$.　　　　　　……………9 分

(Ⅲ) 当 $a\geqslant 0$ 时，因为 $g(-2)=-\dfrac{1}{e^2}-a<0$，$g(a)=(a+1)e^a-a\geqslant(a+1)-a=1>0$，

$g(x)$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $(-2,a)$ 内有唯一零点，设零点为 x_0.

当 $-2<x<x_0$ 时，$g(x)<g(x_0)=0$；当 $x\leqslant-2$ 时，$g(x)=(x+1)e^x-a<-a\leqslant 0$；

当 $x>x_0$ 时，$g(x)>g(x_0)=0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

从而 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)$ 至多有两个零点，不合题意. ……………14 分

19.(本小题 9 分)

解：(1)$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=5$，

当$n=1$ 时，$c_1=max\{b_1-a_1\}=max\{0\}=0$，

当$n=2$时，$c_2=max\{b_1-2a_1,b_2-2a_2\}=max\{-1,-1\}=-1$，

当$n=3$时，$c_3=max\{b_1-3a_1,b_2-3a_2,b_3-3a_3\}=max\{-2,-3,-4\}=-2$，

…………3 分

下面证明：对$\forall n\in N^*$，且$n\geq 2$，都有$c_n=b_1-a_1n$，

当$n\in N^*$，且$2\leq k\leq n$时，

则$(b_k-a_kn)-(b_1-a_1n)$，

$=[(2k-1)-kn]-1+n$

$=(2k-2)-(k-1)n$

$=(k-1)(2-n)$，由$k-1>0$，且$2-n\leq 0$，

则$(b_k-a_kn)-(b_1-a_1n)\leq 0$，则$b_1-a_1n\geq b_k-a_kn$，

因此，对$\forall n\in N^*$，且$n\geq 2$，$c_n=b_1-a_1n=1-n$，$c_{n+1}-c_n=-1$，

又$c_2-c_1=-1-0=-1$，

$\therefore c_{n+1}-c_n=-1$对$\forall n\in N^*$均成立，

$\therefore$数列$\{c_n\}$是等差数列；…………6 分

(2)证明：设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公差分别为d_1，d_2，下面考虑的c_n取值，

由b_1-a_1n，b_2-a_2n，…，b_n-a_nn，

考虑其中任意b_i-a_in，$(i\in N^*$，且$1\leq i\leq n)$，

则$b_i-a_in=[b_1+(i-1)d_2]-[a_1+(i-1)d_1]\times n$，

$=(b_1-a_1n)+(i-1)(d_2-d_1n)$，

下面分$d_1=0$，$d_1>0$，$d_1<0$三种情况进行讨论，

①若$d_1=0$，则$b_i-a_in=(b_1-a_1n)+(i-1)d_2$，

当若$d_2\leq 0$，则$(b_i-a_in)-(b_1-a_1n)=(i-1)d_2\leq 0$，

则对于给定的正整数n而言，$c_n=b_1-a_1n$，此时$c_{n+1}-c_n=-a_1$，

$\therefore$数列$\{c_n\}$是等差数列；

当$d_2>0$，$(b_i-a_in)-(b_n-a_nn)=(i-n)d_2\leq 0$，

则对于给定的正整数n而言，$c_n=b_n-a_nn=b_n-a_1n$，

此时$c_{n+1}-c_n=d_2-a_1$，

$\therefore$数列$\{c_n\}$是等差数列；

此时取$m=1$，则c_1，c_2，…，是等差数列，命题成立；

②若$d_1>0$，则此时$-d_1n+d_2$为一个关于n的一次项系数为负数的一次函数，

故必存在$m\in N^*$，使得$n\geq m$时，$-d_1n+d_2<0$，

则当$n\geq m$时，$(b_i-a_in)-(b_1-a_1n)=(i-1)(-d_1n+d_2)\leq 0$，$(i\in N^*,1\leq i\leq n)$，

因此当$n\geq m$时，$c_n=b_1-a_1n$，

此时$c_{n+1}-c_n=-a_1$，故数列$\{c_n\}$从第m项开始为等差数列，命题成立；

③若$d_1<0$，此时$-d_1n+d_2$为一个关于n的一次项系数为正数的一次函数，

故必存在$s\in N^*$，使得$n\geq s$时，$-d_1n+d_2>0$，

则当$n\geq s$时，$(b_i-a_in)-(b_n-a_nn)=(i-n)(-d_1n+d_2)\leq 0$，$(i\in N^*,1\leq i\leq n)$，

因此，当$n\geq s$时，$c_n=b_n-a_nn$，

此时$\frac{c_n}{n}=\frac{b_n-a_nn}{n}=-a_n+\frac{b_n}{n}$，

$=-d_1n+(d_1-a_1+d_2)+\frac{b_1-d_2}{n}$，

令$-d_1=A>0$，$d_1-a_1+d_2=B$，$b_1-d_2=C$，

下面证明：$\frac{c_n}{n}=An+B+\frac{C}{n}$对任意正整数$M$，存在正整数$m$，使得$n\geq m$，$\frac{c_n}{n}>M$，

若$C\geq 0$，取$m=[\frac{|M-B|}{A}+1]$，$[x]$表示不大于x的最大整数，

当$n\geq m$时，$\frac{c_n}{n}\geq An+B\geq Am+B=A[\frac{|M-B|}{A}+1]+B>A\cdot\frac{M-B}{A}+B=M$，

此时命题成立；

若$C<0$，取$m=[\frac{|M-C-B|}{A}]+1$，

当$n\geq m$时，

$\frac{c_n}{n}=An+B+\frac{C}{n}\geq Am+B+C>A\cdot\frac{|M-C-B|}{A}+B+C\geq M-C-B+B+C=M$，

此时命题成立，

因此对任意正数M，存在正整数m，使得当$n\geq m$时，$\frac{c_n}{n}>M$；

综合以上三种情况，命题得证．…………9 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。