2023 北京平谷高三一模

数　　学

注意事项：

1．本试卷分第 I 卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共 4 页．共 150 分，考试时间为 120 分钟.

2．试题所有答案必须书写在答题纸上，在试卷上作答无效.

3．考试结束后，将答题纸交回，试卷按学校要求保存好.

第 I 卷　选择题（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上.）

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,-2<x<1\},B=\{x\,|\,x>0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(-2,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-2,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

2. 复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2$，则复数 z 对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

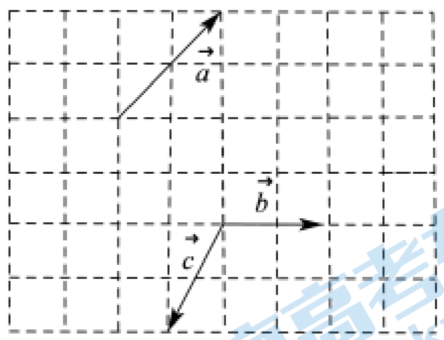
3. 下列函数中，是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

A. $f(x)=x^2-|x|$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　C. $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$　　D. $f(x)=|\ln x|$

4. 已知函数 $f(x)=\log_2 x-\dfrac{3}{x+1}$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(-1,2)$

5. 向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=$（　　）



A. -4　　B. 4　　C. 2　　D. -8

6. 已知抛物线 $C:y^2=2px$，点 O 为坐标原点，并且经过点 $P(1,y_0)$，若点 P 到该抛物线焦点的距离为 2，则 $|OP|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $\sqrt{5}$

7. 已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_1>0$，公比为q，则“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 在平面直角坐标系xOy中，角α以Ox为始边，终边与单位圆交于点$P\left(x_0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则$\cos 2\alpha=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\pm\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

9. 点M、N在圆$C:x^2+y^2+2kx+2my-4=0$上，且M、N两点关于直线$x-y+1=0$对称，则圆C的半径（　　）

A. 最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 最小值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. 最大值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

10. 基本再生数R_0与世代间隔T是新冠肺炎的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$描述累计感染病例数$I(t)$随时间t(单位:天)的变化规律，指数增长率r与R_0，T近似满足$R_0=1+rT$.有学者基于已有数据估计出$R_0=3.28$，$T=6$.据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为(ln2≈0.69)（　　）

A. 1.2 天　　B. 1.8 天

C. 2.5 天　　D. 3.5 天

第II卷　非选择题（共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请把答案填在答题卡中相应题中横线上.）

11. 已知$(1-2x)^5=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$，则$a_4=$__________.

12. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{3}=1$的离心率为 2，则实数$m=$__________.

13. 记函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期为$T$，若$f(T)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，则$\omega$的最小值为__________.

14. 设函数$f(x)=\begin{cases}e^{-x},x<0\\ \sqrt{x},x\geq 0\end{cases}$，$f(x)$的值域是________，设$g(x)=f(x)-a(x-1)$，若$g(x)$恰有两个零点，则$a$的取值范围为________.

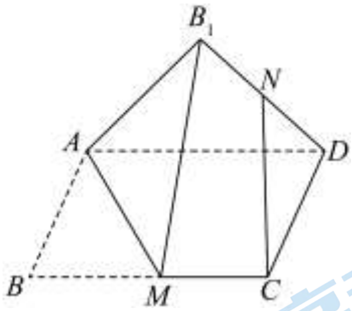
15. 如图，矩形$ABCD$中，$AD=2AB=2$，M为BC的中点，将$\triangle ABM$沿直线AM翻折，构成四棱锥B_1-AMCD，N为B_1D的中点，则在翻折过程中，

①对于任意一个位置总有 CN // 平面 AB_1M ；

②存在某个位置，使得 $CN \perp AB_1$ ；

③存在某个位置，使得 $AD \perp MB_1$ ；

④四棱锥 $B_1 - AMCD$ 的体积最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



上面说法中所有正确的序号是__________.

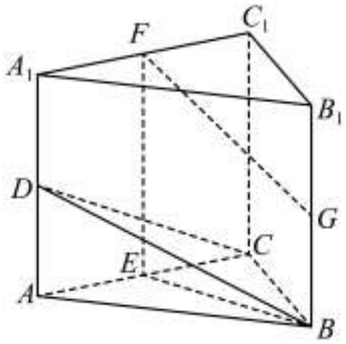
三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\tan B = 2b\sin A$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $BC = 4, A = \frac{\pi}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，D，E，G 分别为 AA_1, AC, BB_1 的中点，A_1C_1 与平面 EBB_1 交于点 F，$AB = BC = \sqrt{5}$，$AC = AA_1 = 2$，$C_1C \perp BE$.



（1）求证：F 为 A_1C_1 的中点；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值.

条件①：平面 $ABC \perp$ 平面 EBB_1；

条件②：$BC_1 = 3$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18. “绿水青山就是金山银山”，某地区甲乙丙三个林场开展植树工程，2011-2020 年的植树成活率（%）统计如下：（表中“/”表示该年末植树）：

	2011年	2012年	2013年	2014年	2015年	2016年	2017年	2018年	2019年	2020年
甲	95.5	92	96.5	91.6	96.3	94.6	/	/	/	/
乙	95.1	91.6	93.2	97.8	95.6	92.3	96.6	/	/	/
丙	97.0	95.4	98.2	93.5	94.8	95.5	94.5	93.5	98.0	92.5

规定：若当年植树成活率大于95%，则认定该年为优质工程.

（1）从乙林场植树的年份中任抽取两年，求这两年都是优质工程的概率；

（2）从甲、乙、丙三个林场植树的年份中各抽取一年，以 X 表示这3年中优质工程的个数，求 X 的分布列；

（3）若乙丙两个林场每年植树的棵数不变，能否根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小？

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A(-2,0),B\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ 两点，设过点 $P(-2,1)$ 的直线椭圆交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 y 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$.

（1）求椭圆 E 的方程：

（2）证明：直线 HN 过定点.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{e}^{-ax},(a>0)$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）讨论 $y=f(x)$ 的单调性；

（3）若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$，求 a 的最大值.

21. 对于每项均是正整数的数列 $A_1:a_1$、a_2、$\cdots$、a_n，定义变换 T_1，T_1 将数列A变换成数列 $T_1(A):n$、a_1-1、a_2-1、$\cdots$、a_n-1. 对于每项均是非负整数的数列 $B:b_1$、b_2、$\cdots$、b_m，定义变换 T_2，T_2 将数列B各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(B)$；又定义

$S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$. 设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列，令

$A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0,1,2,\cdots)$.

（1）如果数列 A_0 为5、1、3，写出数列 A_1、A_2；

（2）对于每项均是正整数的有穷数列A，证明 $S(T_1(A))=S(A)$；

（3）证明：对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0，存在正整数 K，当 $k\geq K$ 时，

$S(A_{k+1})=S(A_k)$.

参考答案

第 I 卷　选择题（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上.）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】由并集的定义求解即可.

【详解】因为集合 $A=\{x\mid -2<x<1\}, B=\{x\mid x>0\}$，

所以 $A\cup B=(-2,+\infty)$.

故选：C.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的除法化简复数 z，利用复数的几何意义可得结论.

【详解】由已知条件可得 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，所以，复数 z 对应的点在第四象限.

故选：D.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】利用基本初等函数的奇偶性及单调性，结合各选项进行判断即可.

【详解】对于 A，由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-x)=(-x)^2-|-x|=x^2-|x|=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上不是单调递减，不符合题意；故 A 错误；

对于 B，由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2}=\dfrac{1}{x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，符合题意；故 B 正确；

对于 C，由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(-x)=\mathrm{e}^{|-x|}=\mathrm{e}^{|x|}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；不符合题意；故 C 错误；

对于 D，$f(x)=|\ln x|$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，不是偶函数，不符合题意；故 D 错误；

故选：B.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】求出函数的定义域，判断出函数在定义域上为单调递增函数，求出函数的零点，即可得答案.

【详解】解：由题意可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $y=\log_2 x$ 与 $y=-\dfrac{3}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 均为单调递增函数，

所以 $f(x)=\log_2 x-\dfrac{3}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 为单调递增函数，

因为 $f(2)=\log_2 2-\dfrac{3}{2+1}=1-1=0$，

所以 $f(x)>0$ 的解集为 $(2,+\infty)$.

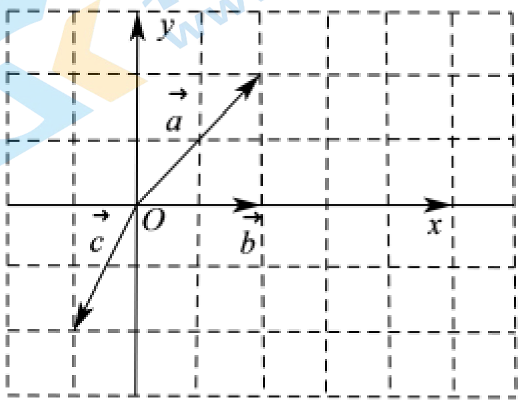
故选：C

5. 【答案】A

【解析】

【分析】将 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 平移至同一个起点并构建直角坐标系，写出相关向量的坐标，再应用向量数量积的坐标表示求 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$.

【详解】将 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 平移至同一个起点位置，如下图 O 点位置，建立直角坐标系 xOy，



则 $\vec{a}=(2,2),\vec{b}=(2,0),\vec{c}=(-1,-2)$，所以 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=(0,2)\cdot(-1,-2)=-4$.

故选：A

6. 【答案】D

【解析】

【分析】由焦半径公式列出方程，求出 $p=4$，得到 $y_0^2=4$，求出 $|OP|$ 的长.

【详解】抛物线准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，由焦半径可知：$1+\dfrac{p}{2}=2$，解得：$p=2$.

则 $C: y^2=4x$，此时 $y_0^2=4$，则 $|OP|=\sqrt{1^2+4}=\sqrt{5}$.

故选：D

7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，由等比数列的通项公式可得 $a_{2n-1}+a_{2n}=a_1q^{2n-2}(1+q)$，然后分别验证充分性以及必要

性即可得到结果.

【详解】由题意得 $a_n = a_1 q^{n-1}\left(a_1 > 0\right)$， $a_{2n-1} + a_{2n} = a_1 q^{2n-2} + a_1 q^{2n-1} = a_1 q^{2n-2}\left(1+q\right)$，

若 $q<0$，因为 $1+q$ 的符号不确定，所以无法判断 $a_{2n-1}+a_{2n}$ 的符号；

反之，若 $a_{2n-1}+a_{2n}<0$，即 $a_1 q^{2n-2}\left(1+q\right)<0$，可得 $q<-1<0$，

故“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的必要而不充分条件

故选:B

8. 【答案】A

【解析】

【分析】根据单位圆及三角函数的定义求出 $\sin\alpha$，再由二倍角余弦公式求解.

【详解】因为 $P\left(x_0, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 是角 α 终边与单位圆的交点，

所以 $\sin\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{1} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

故 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = -\dfrac{1}{3}$.

故选：A

9. 【答案】C

【解析】

【分析】将圆的一般方程化为标准方程，得出圆心坐标和半径的表达式，利用已知条件，得到圆心在直线上，结合二次函数的性质即可求解.

【详解】由 $x^2+y^2+2kx+2my-4=0$，得 $\left(x+k\right)^2+\left(y+m\right)^2=k^2+m^2+4$，

所以圆心 C 为 $\left(-k,-m\right)$，半径为 $r=\sqrt{k^2+m^2+4}$，

由题意可得直线 $x-y+1=0$ 经过圆心 $C\left(-k,-m\right)$，

故有 $-k+m+1=0$，即 $k=m+1$，

所以半径为 $r=\sqrt{k^2+m^2+4}=\sqrt{\left(m+1\right)^2+m^2+4}=\sqrt{2\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，圆 C 的半径的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

故选：C.

10. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得 $I(t)=e^{rt}=e^{0.38t}$，设在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天，根据 $e^{0.38(t+t_1)}=2e^{0.38t}$，解得 t_1 即可得结果.

【详解】因为 $R_0=3.28$，$T=6$，$R_0=1+rT$，所以 $r=\dfrac{3.28-1}{6}=0.38$，所以 $I(t)=e^{rt}=e^{0.38t}$，

设在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天，

则 $e^{0.38(t+t_1)}=2e^{0.38t}$，所以 $e^{0.38t_1}=2$，所以 $0.38t_1=\ln 2$，

所以 $t_1=\dfrac{\ln 2}{0.38}\approx\dfrac{0.69}{0.38}\approx 1.8$ 天.

故选：B.

【点睛】本题考查了指数型函数模型的应用，考查了指数式化对数式，属于基础题.

第II卷　非选择题（共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请把答案填在答题卡中相应题中横线上.）

11. 【答案】-10

【解析】

【分析】利用二项式定理的通项公式即可求解.

【详解】$(1-2x)^5$ 的二项展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_5^r\times 1^{5-r}\times(-2x)^r=(-2)^r\times C_5^r\times x^r$，

所以 $a_4=(-2)^1\times C_5^1=-10$.

故答案为：-10.

12. 【答案】-9

【解析】

【分析】由题知 $m<0$，$a^2=3,b^2=-m$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{m}{3}}=2$，求解即可得出答案.

【详解】由题知，$m<0$，则方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线，

所以 $a^2=3,b^2=-m$，则 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{m}{3}}=2$，

所以 $1-\dfrac{m}{3}=4$，解得：$m=-9$.

故答案为：-9.

13. 【答案】3

【解析】

【分析】首先表示出T，根据$f\left(T\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$求出$\varphi$，再根据$x=\dfrac{\pi}{9}$为函数的零点，即可求出$\omega$的取值，从而得解；

【详解】解：因为$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$，（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）

所以最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，因为$f\left(T\right)=\cos\left(\omega\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos\left(2\pi+\varphi\right)=\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，即$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

又$x=\dfrac{\pi}{9}$为$f\left(x\right)$的零点，所以$\dfrac{\pi}{9}\omega+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathrm{Z}$，解得$\omega=3+9k,k\in\mathrm{Z}$，

因为$\omega>0$，所以当$k=0$时$\omega_{\min}=3$；

故答案为：3

14. 【答案】 ①. $[0,+\infty)$ ②. $(-\infty,-1)$

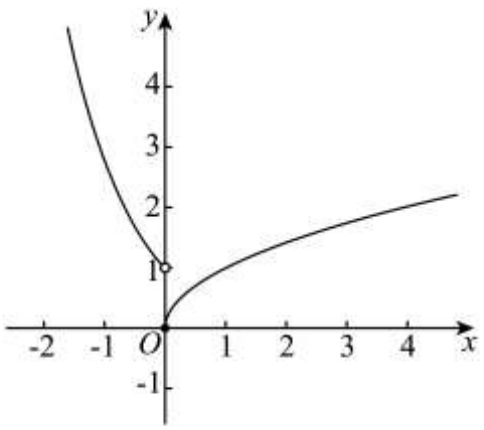
【解析】

【分析】求$x<0$时的值域及$x\geq0$的值域，最后求并集即可（或者利用图象法观察）值域；数形结合即可求出参数a的范围

【详解】当$x<0$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}\in\left(1,+\infty\right)$，当$x\geq0$时，$f\left(x\right)=\sqrt{x}\geq0$，

所以函数$f(x)$的值域为$[0,+\infty)$；

作出函数图象

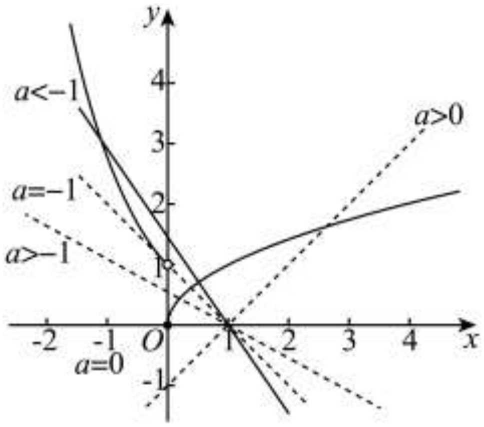


从图象上可以看出函数$f(x)$的值域为$[0,+\infty)$，

因为$g(x)=f(x)-a(x-1)$恰有两个零点，则方程$f(x)=a(x-1)$恰有两个解，

从而函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x},x<0\\ \sqrt{x},x\geq0\end{cases}$与$y=a(x-1)$有两个交点，易知$y=a(x-1)$图象是恒过点（1，0）的直线，

如图



当 $a\geq 0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x<0\\ \sqrt{x},x\geq 0\end{cases}$ 与 $y=a(x-1)$ 有一个交点，当 $0<a<-1$ 时，

函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x<0\\ \sqrt{x},x\geq 0\end{cases}$ 与 $y=a(x-1)$ 有一个交点，又当 $x<0$ 时， $f(x)=e^{-x}$ ，则 $f'(x)=-e^{-x}$ ，

所以 $f'(0)=-1$，故在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y-1=-1(x-0)$，即 $y=-1(x-1)$，

故当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x<0\\ \sqrt{x},x\geq 0\end{cases}$ 与 $y=a(x-1)$ 有一个交点，

所以要使函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x<0\\ \sqrt{x},x\geq 0\end{cases}$ 与 $y=a(x-1)$ 有两个交点，则 $a<-1$，即 $g(x)$ 恰有两个零点时，a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

故答案为：$[0,+\infty)$；$(-\infty,-1)$.

15. 【答案】①④

【解析】

【分析】证明 $EM\ //\ NC$，结合线面平行判定判断①；由 $EM\ //\ NC$ 结合 AB_1 与 EM 不垂直，判断②；由线面垂直的判定得出点 B_1 与点 F 重合，从而判断③；取 AM 的中点为 G，连接 B_1G，当 $B_1G\perp$ 平面 $AMCD$ 时，四棱锥 B_1-AMCD 的体积最大，从而判断④.

【详解】分别取 AB_1,AD 的中点为 E,F，连接 EN,EM,B_1F,FM .

因为 AB_1,B_1D 的中点分别为 E,N，所以 $EN\ //\ AD\ //\ MC$，且 $EN=\frac{1}{2}AD=MC$.

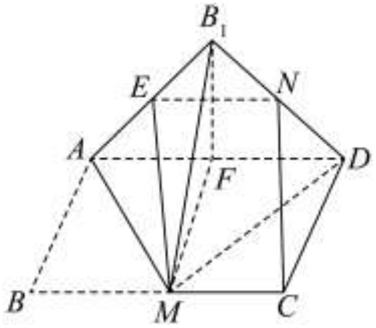
即四边形 $ENCM$ 为平行四边形，故 $EM\ //\ NC$，由线面平行的判定可知对于任意一个位置总有 $CN\ //$ 平面 AB_1M，故①正确；

因为 $\angle AB_1M=90°$，所以 AB_1 与 EM 不垂直，由 $EM\ //\ NC$ 可知， AB_1 与 NC 不垂直，故②错误；

由题意 $AB_1\perp B_1M$，若 $AD\perp MB_1$，则由线面垂直的判定可得 $MB_1\perp$ 平面 AB_1D.

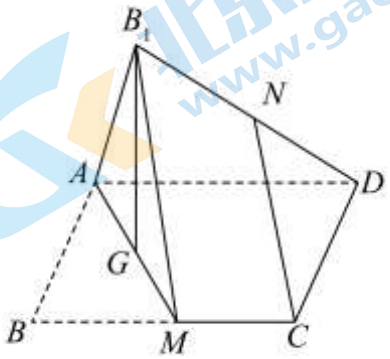
则 $MB_1\perp B_1D$，因为 $AM=MD$，所以 $\triangle AMB_1$ 与 $\triangle MB_1D$ 全等，则 $AB_1=B_1D=1$，

此时点 B_1 与点 F 重合，不能形成四棱锥 B_1-AMCD，故③错误；



取 AM 的中点为 G，连接 B_1G，$B_1G=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $B_1G\perp$ 平面 $AMCD$ 时，四棱锥 B_1-AMCD 的体积最大，最大值为 $\frac{1}{3}(1+2)\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故④正确；

故答案为：①④



三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

16. 【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$

（2）$6+2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件及同角三角函数的商数关系，结合三角形内角的特点及特殊值对应的特殊角即可求解；

（2）根据（1）的结论及三角形的内角和定理，再利用两角和的正弦公式及正弦定理，结合三角形面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

由 $a\tan B=2b\sin A$，得 $\sin A\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=2\sin B\cdot\sin A$，

因为 $0<A<\pi,0<B<\pi,$ 所以 $\sin A>0$，$\sin B>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$B=\frac{\pi}{3}$，因为 $A=\frac{\pi}{4}$，所以 $C=\pi-A-B$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $C=\pi-\left(B+A\right)$，

所以 $\sin C=\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2+2\sqrt{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\times(2+2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6+2\sqrt{3}$

17. 【答案】（1）见解析　（2）$\frac{2\sqrt{105}}{105}$

【解析】

【分析】（1）由线面平行的性质定理可证得 $BB_1//EF$，即可证明；

（2）根据条件建立空间直角坐标系，求出各点坐标，利用方程组解得平面 BCD 一个法向量，利用直线的方向向量和平面的法向量计算即可.

【小问 1 详解】

由三棱柱的性质知，$BB_1//CC_1$，$BB_1\not\subset$ 平面 AA_1C_1C，$CC_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $BB_1//$ 平面 AA_1C_1C，又因为 $BB_1\subset$ 平面 EFB_1B，

平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $EFB_1B=EF$，

所以 $BB_1//EF$，因为 E 为 AC 的中点，所以 F 为 A_1C_1 的中点.

【小问 2 详解】

选条件①，因为平面 $ABC\perp$ 平面 EBB_1，平面 $ABC\cap$ 平 $EBB_1=BE$，

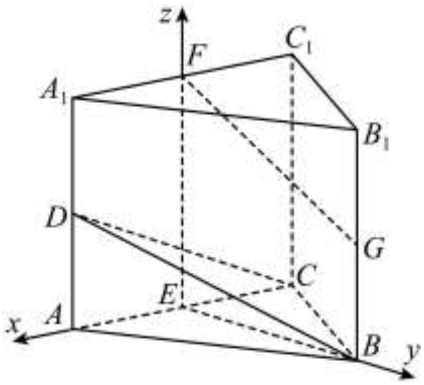
又因为 $AB=BC=\sqrt{5}$，E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$，

所以 $AC\perp$ 平面 EBB_1，又因为 $EF\subset$ 平面 EBB_1，所以 $EF\perp AC$，

又因为 $BE\perp AC$，$C_1C\perp BE$，$BE\cap CC_1=E$

AC，$C_1C\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BE\perp$ 平面 AA_1C_1C，

如图建立空间直角坐称系 $E-xyz$.



由题意得 $B(0,2,0),C(-1,0,0),D(1,0,1),F(0,0,2),G(0,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(2,0,1),\overrightarrow{CB}=(1,2,0)$.

设平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，

$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}2a+c=0\\ a+2b=0\end{cases}$，

$a=2$，则 $b=-1,c=-4$，

$\therefore$ 平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(2,-1,-4)$，

又 $\overrightarrow{FG}=(0,2,-1)$，

设直线 FG 与平面 BCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\vec{n},\overrightarrow{FG}\right|=\dfrac{2\sqrt{105}}{105}$，

所以直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{105}}{105}$.

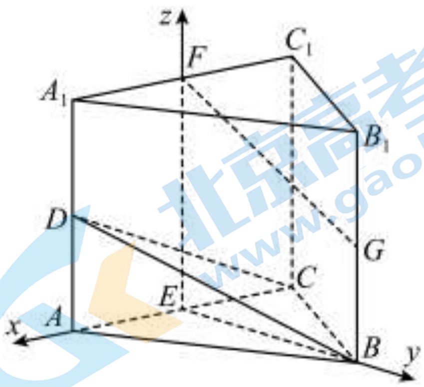
选条件②，因为 $AB=BC=\sqrt{5}$， $AC=AA_1=2$， $BC_1=3$，

则 $CC_1^{\ 2}+BC^2=BC_1^{\ 2}$，所以 $CC_1\perp BC$， 又因为 $C_1C\perp BE$，

$BC\cap BE=B$， BC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $C_1C\perp$ 平面 ABC，

因为 $AB=BC=\sqrt{5}$，E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$，

如图建立空间直角坐称系 $E-xyz$.



由题意得 $B(0,2,0),C(-1,0,0),D(1,0,1),F(0,0,2),G(0,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(2,0,1),\overrightarrow{CB}=(1,2,0)$.

设平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，

$$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases},\therefore \begin{cases}2a+c=0\\ a+2b=0\end{cases},$$

$a=2$，则 $b=-1,c=-4$，

$\therefore$ 平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(2,-1,-4)$，

又 $\overrightarrow{FG}=(0,2,-1)$，

设直线 FG 与平面 BCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\vec{n},\overrightarrow{FG}\right|=\dfrac{2\sqrt{105}}{105}$，

所以直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{105}}{105}$.

18. 【答案】（1） $\frac{2}{7}$

（2）分布列见解析　　（3）不能，理由见解析

【解析】

【分析】（1）由古典概率的计算公式代入即可得出答案；

（2）求出 X 的可能取值，分别计算出其概率，即可得出分布列；

（3）分别求出两个林场植树成活率平均数即可判断.

【小问 1 详解】

乙林场植树共 7 年，其中优质工程有 4 年，

从乙林场植树的年份中任抽取两年，这两年都是优质工程为事件 A，

$$所以 P(A)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

【小问 2 详解】

甲林场植树共 6 年，其中优质工程有 3 年，

乙林场植树共 7 年，其中优质工程有 4 年，

丙林场植树共 10 年，其中优质工程有 5 年，

则 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{3}{28},$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{11}{28},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{1}{7}.$$

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{1}{7}$

【小问 3 详解】不能根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小.

因为乙、丙两个林场优质工程概率分别为 $\frac{4}{7},\frac{1}{2}$，且 $\frac{4}{7}>\frac{1}{2}$.

则设乙、丙林场植树成活率平均数分别为 $\overline{x_1},\overline{x_2}$，

$$\overline{x_1}=\frac{95.1+91.6+93.2+97.8+95.6+92.3+96.6}{7}=94.6,$$

$$\overline{x_2}=\frac{97.0+95.4+98.2+93.5+94.8+95.5+94.5+93.5+98.0+92.5}{10}=95.29$$

所以乙、丙这两个林场植树成活率平均数分别为：94.6，95.29，且丙林场植树成活率大于乙林场植树成活率.

所以不能根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小.

19. 【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）直线 HN 过定点 $(-2,0)$，证明见解析.

【解析】

【分析】（1）将给定点代入设出的方程求解即可；

（2）先根据两条特殊直线的交点，判断定点的坐标，再设过点 P 的一般方程，联立椭圆方程，得到韦达定理，求得直线 TN 的方程，并代入定点坐标，验证是否成立，即可判断是否过定点.

【小问 1 详解】

解：因为椭圆 E 的方程为 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A(-2,0),B\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 两点，

则 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1\end{cases}$，解得 $a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

【小问 2 详解】

因为 $A(-2,0),B\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$，所以 $AB:y=\dfrac{3}{2}(x+2)$，

①假设过点 $P(-2,1)$ 的直线过原点，则 $y=-\dfrac{x}{2}$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

可得 $M(-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$N(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，代入 AB 方程 $y=\dfrac{3}{2}(x+2)$，可得

$T(-\sqrt{3},\dfrac{3}{2}(-\sqrt{3}+2))$，由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$ 得到 $H(-\sqrt{3},-\dfrac{7\sqrt{3}}{2}+6)$．求得 HN 方程：

$y=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}(x+2)$，过点 $(-2,0)$．

②分析知过点 $P(-2,1)$ 的直线斜率一定存在，设 $kx-y+2k+1=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$．

联立 $\begin{cases}kx-y+2k+1=0\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(4k^2+3)x^2+(16k^2+8k)x+4(4k^2+4k-2)=0$，

可得 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{16k^2+8k}{4k^2+3}\\ x_1x_2=\dfrac{4(4k^2+4k-2)}{4k^2+3}\end{cases}$，

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4k+2=\dfrac{12k+6}{4k^2+3}$，

$y_1y_2=(kx_1+2k+1)(kx_2+2k+1)=k^2x_1x_2+(2k^2+k)(x_1x_2)+4k+4k^2+1=\dfrac{3+12k}{4k^2+3}$，

且 $x_1y_2+x_2y_1=x_1(kx_2+2k+1)+x_2(kx_1+2k+1)=2kx_1x_2+(2k+1)(x_1x_2)=\dfrac{-24k}{4k^2+3}(*)$

因为点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，所以 T 为 MH 的中点，

联立 $\begin{cases}x=x_1\\ y=\dfrac{3}{2}(x+2)\end{cases}$，可得 $T(x_1,\dfrac{3}{2}(x_1+2)),H(x_1,3(x_1+2)-y_1)$.

可求得此时 $HN:y-y_2=\dfrac{3x_1+6-y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

假设直线 HN 过定点 $(-2,0)$，

将 $(-2,0)$，代入整理得 $-6(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3x_1x_2-12=0$，

将 $(*)$ 代入，得 $96k^2+48k+24k+12-24k-48k^2-48k+24-48k^2-36=0,$

显然成立，

综上，可得直线 HN 过定点 $(-2,0)$.

20. 【答案】（1） $y=x+1$

（2）见解析　　（3） 2

【解析】

【分析】（1）根据导数的几何意义得出切线方程；

（2）分类讨论 a 的值，利用导数得出单调性；

（3）当 $0<a\le 2$，由单调性得出恒有 $f(x)>1$，当 $a>2$，存在 $x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}}\in(0,\sqrt{\frac{a-2}{a}})$，使得 $f(x_0)<1$，从而得出 a 的最大值.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-x}$，所以 $f(0)=1$，因为 $f'(x)=\frac{x^2+1}{(1-x)^2}e^{-x}$，所以 $f'(0)=1$.

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{ax^2+2-a}{(1-x)^2}e^{-ax}$.

当 $a=2$ 时，$f'(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^2}e^{-ax}>0$，即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1),(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $0<a<2$ 时，$f'(x)=\frac{ax^2+2-a}{(1-x)^2}e^{-ax}>0$，即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1),(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>2$ 时，$0<\frac{a-2}{a}<1$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-\sqrt{\frac{a-2}{a}},x_2=\sqrt{\frac{a-2}{a}}$

若 $f'(x)>0$ 时，$x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1\right)\cup(1,+\infty)$；

若 $f'(x)<0$ 时，$x\in\left(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$；

即函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right),\left(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1\right),(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$ 上单调递减.

综上所述，

当 $0<a\le 2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1),(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right),\left(\sqrt{\frac{a-2}{a}},1\right),(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{\frac{a-2}{a}},\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$ 上单调递减.

【小问 3 详解】

由（2）可知，当 $0<a\le 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，恒有 $f(x)>f(0)=1$；

当 $a>2$ 时，由（2）可知，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$ 上单调递减，

存在 $x_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}}\in(0,\sqrt{\frac{a-2}{a}})$，使得 $f(x_0)<f(0)=1$，故 $a>2$ 不合题意；

综上，$0<a\le 2$，即 a 的最大值为 2

【点睛】易错点睛：用导数求函数的单调区间或判断函数的单调性问题时应注意如下几方面：

（1）在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域；

（2）不能随意将函数的 2 个独立的单调递增（或递减）区间写成并集形式；

（3）利用导数解决含参函数的单调性问题时，一般将其转化为不等式恒成立问题，解题过程中要注意分类讨论和数形结合思想的应用.

21. 【答案】（1）$A_1:4$、3、2，$A_2:4$、3、3、2

（2）证明见解析　　（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由 $A_0:5$、1、3，求得 $T_1(A_0)$ 再通过 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))$ 求解；

（2）设有穷数列 A 求得 $T_1(A)$ 再求得 $S(T_1(A))$，由 $S(A)=2(a_1+2a_2+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，两者作差比较；

（3）设 A 是每项均为非负整数的数列 a_1、a_2、$\cdots$、a_n. 在存在 $1\le i<j\le n$，有 $a_i\le a_j$ 时条件下，交换数列 A 的第 i 项与第 j 项得到数列 B，在存在 $1\le m<n$，使得 $a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$ 时条件下，若记数列 a_1、a_2、$\cdots$、a_m 为 C，$A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))$，$S(A_{k+1})\le S(T_1(A_k))$. 由 $S(T_1(A_k))=S(A_k)$，得到 $S(A_{k+1})\le S(A_k)$. $S(A_k)$ 是大于 2 的整数，所以经过有限步后，必有 $S(A_k)=S(A_{k+1})=S(A_{k+2})=0$.

【小问 1 详解】

解：$A_0:5$、1、3，$T_1(A_0):3$、4、0、2，$A_1=T_2(T_1(A_0)):4$、3、2，

$T_1(A_1):3$、4、3、2，$A_2=T_2(T_1(A_1)):4$、3、3、2.

【小问 2 详解】

证明：设每项均是正整数的有穷数列 A 为 a_1、a_2、$\cdots$、a_n，

则 $T_1(A)$ 为 n、a_1-1、a_2-1、$\cdots$、a_n-1，

从而 $S(T_1(A))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$.

又$S(A)=2(a_1+2a_2+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，

所以$S(T_1(A))-S(A)$

$=2[n-2-3-\cdots-(n+1)]+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n=-n(n+1)+n^2+n=0$，

故$S(T_1(A))=S(A)$.

【小问 3 详解】

解：设 A 是每项均为非负整数的数列a_1，$a_2,\cdots$，a_n.

当存在$1\le i<j\le n$，使得$a_i\le a_j$时，交换数列 A 的第 i 项与第 j 项得到数列B，

则$S(B)-S(A)=2(ia_j+ja_i-ia_i-ja_j)=2(i-j)(a_j-a_i)\le 0$.

当存在$1\le m<n$，使得$a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0$时，若记数列$a_1$，$a_2,\cdots$，$a_m$为$C$，

则$S(C)=S(A)$.

所以$S(T_2(A))\le S(A)$.

从而对于任意给定的数列A_0，由$A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0，1，2，\cdots)$

可知$S(A_{k+1})\le S(T_1(A_k))$.

又由（2）可知$S(T_1(A_k))=S(A_k)$，所以$S(A_{k+1})\le S(A_k)$.

即对于$k\in\mathrm{N}$，要么有$S(A_{k+1})=S(A_k)$，要么有$S(A_{k+1})\le S(A_k)-1$.

因为$S(A_k)$是大于 2 的整数，所以经过有限步后，必有$S(A_k)=S(A_{k+1})=S(A_{k+2})=0$.

即存在正整数K，当$k\ge K$时，$S(A_{k+1})=S(A)$.

【点睛】思路点睛：本题考查了数列新定义问题，按着某种规律新生出另一个数列的题目，涉及到归纳推理的思想方法，对学生的思维能力要求较高，综合性强，能很好的考查学生的综合素养，解答的关键是要理解新定义，根据定义进行逻辑推理，进而解决问题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！