2023 北京八中高二（上）期末

数　　学

年级：高二 科目：数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知直线 $l_1: ax-y-1=0$，$l_2: ax+(a+2)y+1=0$．若 $l_1 \perp l_2$，则实数 $a=$（　　）

A. -1 或 1　　B. 0 或 1　　C. -1 或 2　　D. -3 或 2

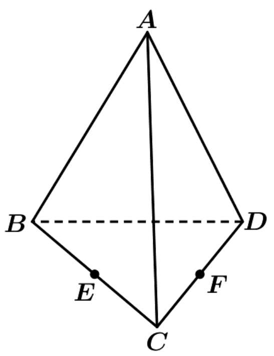
2. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中，常数项为（　　）

A. -112　　B. 112　　C. -1120　　D. 1120

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{1}{4}x$　　B. $y=\pm\frac{1}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　D. $y=\pm x$

4. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，设 E，F 分别是 BC，CD 的中点，则 $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)=$（　　）



A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $\overrightarrow{FA}$　　C. $\overrightarrow{AF}$　　D. $\overrightarrow{EF}$

5. 下列利用方向向量、法向量判断线、面位置关系的结论中，正确的是（　　）

A. 两条不重合直线 l_1, l_2 的方向向量分别是 $\vec{a}=(2,3,-1), \vec{b}=(2,3,1)$，则 $l_1 /\!/ l_2$

B. 直线 l 的方向向量为 $\vec{a}=(1,-1,2)$，平面 α 的法向量为 $\vec{u}=(6,4,-1)$，则 $l \perp \alpha$

C. 两个不同的平面 α, β 的法向量分别是 $\vec{u}=(2,2,-1), \vec{v}=(-3,4,2)$，则 $\alpha \perp \beta$

D. 直线 l 的方向向量 $\vec{a}=(0,3,0)$，平面 α 的法向量是 $\vec{u}=(0,-5,0)$，则 $l /\!/ \alpha$

6. “$a>1$”是“直线 $ax-y-1=0$ 的倾斜角大于 $\frac{\pi}{4}$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 当动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线 A_1C 上运动时，异面直线 BP 与 AD_1 所成角的取值范围是

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

8. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点,点 O 是原点,若 $|AF|=3$;则 ΔAOB 的面积为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

9. 已知⊙M：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l：$2x+y+2=0$，P 为 l 上　动点，过点 P 作⊙M 的切线 PA,PB，切点为 A,B，当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（　　）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$　　C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

10. 点 P 在直线 $l:y=x+p(p>0)$ 上，若存在过 P 的直线交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于 A,B 两点，且 $2|PA|=|AB|$，则称点 P 为“M 点”，那么下列结论中正确的是（　　）

A. 直线 l 上　所有点都是“M 点”

B. 直线 l 上仅有有限个点是“M 点”

C. 直线 l 上的所有点都不是“M 点”

D. 直线 l 上有无穷多个点（但不是所有的点）是“M 点”

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 过点(3，1)作圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的弦，其中最短的弦长为_________.

12. 若 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=$_________.（用数字作答）

13. 用 $1,2,3$ 三个数字组成一个四位数，要求每个数字至少出现一次，共可组成个不同的四位数_________（用数字作答）.

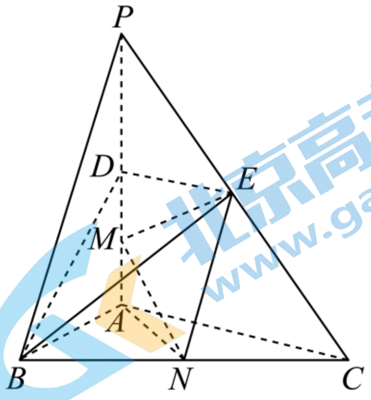
14. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为___________.

15. 将杨辉三角中的奇数换成 1，偶数换成 0，得到如图所示的 0—1 三角数表．从上往下数，第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行，第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行，…，第 n 次全行的数都为 1 的是第______行；第 61 行中 1 的个数是______.

第1行　　　　1　1
第2行　　　1　0　1
第3行　　1　1　1　1
第4行　1　0　0　0　1
第5行　1　1　0　0　1　1
…　…　　　…　…

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$底面 $ABC,\angle BAC=90^{\circ}$. 点 D,E,N 分别为棱 PA,PC,BC 的中点，M 是线段 AD 的中点，$PA=AC=4,AB=2$.



（1）求证：MN // 平面 BDE；

（2）求直线 AC 与平面 EMN 的夹角的正弦值；

（3）求点 A 到平面 EMN　距离.

17. 学校游园活动有这样一个游戏项目:甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球, 乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球, 这些球除颜色外完全相同. 每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球, 若摸出的白球不少于 2 个, 则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)

（1）求在 1 次游戏中,

①摸出 3 个白球的概率;

②获奖的概率;

（2）求在 2 次游戏中获奖次数 X 的分布列.

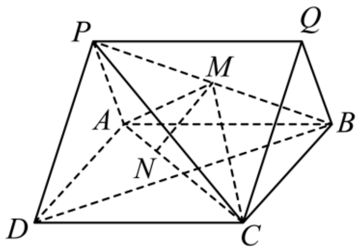
18. 已知椭圆 $C:mx^2+3my^2=1\ (m>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{6}$，O 为坐标原点.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率.

（2）设点 $A(3,0)$，动点 B 在 y 轴上，动点 P 在椭圆 C 上，且点 P 在 y 轴的右侧. 若 $BA=BP$，求四边形 $OPAB$ 面积的最小值.

19. 如图，在三棱柱 $PAD-QBC$ 中，侧面 $ABCD$　正方形，$AB=4$，

$PA=PD=\sqrt{6},AB\perp AP,DC\perp DP$，点 M 在线段 PB 上，$PD//$平面 MAC.



（1）求证：M 为 PB 的中点；

（2）求二面角 $B-PD-A$ 的大小；

（3）在线段 AC 上是否存在点 N，使得直线 MN 与平面 BDP 所成的角为 30°，若存在，求出 $\dfrac{AN}{AC}$ 的值；若不存在，请说明理由.

20. 已知椭圆 C 的中心在原点,焦点在 x 轴上,短轴长为 $2\sqrt{2}$,离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（1）求椭圆 C　方程;

（2）一条动直线 l 与椭圆 C 交于不同两点 M,N,O 为坐标原点,$\triangle OMN$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,求证:$|OM|^2+|ON|^2$ 为定值.

21. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点．对任意的点 $P(x,y)$，定义 $\|OP\|=|x|+|y|$．任取点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，记 $A'(x_1, y_2)$，$B'(x_2, y_1)$，若此时 $\|OA\|^2+\|OB\|^2 \ge \|OA'\|^2+\|OB'\|^2$ 成立，则称点 A，B 相关.

（1）分别判断下面各组中两点是否相关，并说明理由；

① $A(-2,1)$，$B(3,2)$；② $C(4,-3)$，$D(2,4)$．

（2）给定 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\ge 3$，点集 $\Omega_n=\{(x,y)\,|\,-n\le x\le n,-n\le y\le n,x,y\in Z\}$．

（i）求集合 Ω_n 中与点 $A(1,1)$ 相关的点的个数；

（ii）若 $S\subseteq\Omega_n$，且对于任意的 A，$B\in S$，点 A，B 相关，求 S 中元素个数的最大值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】C

【解析】

【分析】

利用两条直线斜率之积为-1求解.

【详解】若$l_1 \perp l_2$，则$a^2+(-1)\cdot(a+2)=0$，解得$a=2$或$a=-1$.

故选：C.

【点睛】若直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$和直线$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，当直线$l_1 \perp l_2$时有，$A_1A_2+B_1B_2=0$.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】求出$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^8$的通项公式，令$\frac{8-4r}{3}=0$，求得$r=2$，即可得展开式的常数项.

【详解】二项式$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^8$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r\cdot x^{\frac{8-r}{3}}\cdot(-2)^r\cdot x^{-r}=(-2)^r\cdot\mathrm{C}_8^r\cdot x^{\frac{8-4r}{3}}$

令$\frac{8-4r}{3}=0$，求得$r=2$，可得展开式的常数项为$4\mathrm{C}_8^2=112$.

故选: B.

3. 【答案】C

【解析】

【详解】$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，即$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，故渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$.

【考点】本题考查双曲线的基本性质，考查学生的化归与转化能力.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】利用空间向量的线性运算求得正确结论.

【详解】因为$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}$，

所以$\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}$.

故选：C

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据空间位置关系的向量判断方法对四个选项一一判断即可.

【详解】对于 A：因为$\vec{a}=(2,3,-1),\vec{b}=(2,3,1)$，所以$\vec{a}//\vec{b}$不成立，所以$l_1 // l_2$不成立.故 A 错误；

对于 B：因为$\vec{a}=(1,-1,2)$，$\vec{u}=(6,4,-1)$,所以$\vec{a}\cdot\vec{u}=1\times6+(-1)\times4+2\times(-1)=0$，

所以$\vec{a}\perp\vec{u}$，所以$l//\alpha$ 或$l\subset\alpha$.故 B 错误；

对于 C：因为$\vec{u}=(2,2,-1),\vec{v}=(-3,4,2)$，,所以$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times(-3)+2\times4+(-1)\times2=0$，

所以$\vec{v}\perp\vec{u}$，所以$\alpha\perp\beta$.故 C 正确；

对于 D：因为$\vec{a}=(0,3,0)$，$\vec{u}=(0,-5,0)$,所以$\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{u}$，

所以$l\perp\alpha$.故 D 错误；

故选：C

6. 【答案】A

【解析】

【分析】由直线$ax-y-1=0$的倾斜角大于$\frac{\pi}{4}$得到不等式，求出a的范围，

从而利用充分条件，必要条件的定义得解.

【详解】设直线的倾斜角为θ，

直线$ax-y-1=0$可化为$y=ax-1$，所以$\tan\theta=a$

由直线的倾斜角大于$\frac{\pi}{4}$可得：$\tan\theta>1$或$\tan\theta<0$，

即：$a>1$或$a<0$，

所以$a>1 \Rightarrow a>1$或$a<0$，但$a>1$或$a<0 \not\Rightarrow a>1$

故选 A

【点睛】本题主要考查了充分条件，必要条件的概念，还考查了倾斜角与斜率的关系，属于基础题

7. 【答案】B

【解析】

【分析】

以D为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出 BP 与 AD_1所成角的取值范围.

【详解】以D为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$分别为x，y，z轴正向，建立空间直角坐标系$D-xyz$，则

$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{CA_1}=(1,-1,1)$，设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CA_1}$，则$\lambda\in[0,1]$，

$\therefore\overrightarrow{CP}=(\lambda,-\lambda,\lambda)$，$\therefore\overrightarrow{BP}=(\lambda-1,-\lambda,\lambda)$，

故$\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BP}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{BP}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+1}}$，

对于函数$h\left(x\right)=3\lambda^2-2\lambda+1\ =3\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$，$\lambda\in\left[0,1\right]$有：

$h_{\min}\left(x\right)=h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$，$h_{\max}\left(x\right)=h\left(1\right)=2$，

故$\cos\left\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BP}\right\rangle\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，又$\left\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BP}\right\rangle\in\left[0,\pi\right]$，

故$\left\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{BP}\right\rangle\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$. 故选B.

【点睛】本题考查异面直线所成角的取值范围的求法，考查异面直线所成角的概念等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

8. 【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：抛物线$y^2=4x$焦点为$F\left(1,0\right)$，准线方程为$x=-1$，

由$|AF|=3$得$A(2,2\sqrt{2}),B(\frac{1}{2},-\sqrt{2})$或$A(2,-2\sqrt{2}),B(\frac{1}{2},\sqrt{2})$

所以$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_A-y_B|=\frac{1}{2}\times1\times\left|2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故答案为C.

考点：1、抛物线　定义；2、直线与抛物线的位置关系.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】由题意可判断直线与圆相离，根据圆的知识可知，四点A,P,B,M共圆，且$AB\perp MP$，根据$|PM|\cdot|AB|=4S_{\vartriangle PAM}=4|PA|$可知，当直线$MP\perp l$时，$|PM|\cdot|AB|$最小，求出以$MP$为直径的圆的方程，根据圆系的知识即可求出直线$AB$的方程.

【详解】圆的方程可化为$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$，点$M$到直线$l$的距离为$d=\frac{|2\times1+1+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}>2$，所以直线$l$与圆相离.

依圆的知识可知，四点A,P,B,M四点共圆，且$AB\perp MP$，所以

$|PM|\cdot|AB|=4S_{\vartriangle PAM}=4\times\frac{1}{2}\times|PA|\times|AM|=4|PA|$，而$|PA|=\sqrt{|MP|^2-4}$，

当直线$MP\perp l$时，$|MP|_{\min}=\sqrt{5}$，$|PA|_{\min}=1$，此时$|PM|\cdot|AB|$最小.

$\therefore MP:y-1=\frac{1}{2}\left(x-1\right)$即$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，由$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\2x+y+2=0\end{cases}$解得，$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$.

所以以MP为直径的圆的方程为$\left(x-1\right)\left(x+1\right)+y\left(y-1\right)=0$，即$x^2+y^2-y-1=0$，

两圆的方程相减可得：$2x+y+1=0$，即为直线 AB 的方程.

故选：D.

【点睛】本题主要考查直线与圆，圆与圆的位置关系的应用，以及圆的几何性质的应用，意在考查学生的转化能力和数学运算能力，属于中档题.

10. 【答案】A

【解析】

【分析】首先判断直线 l 与抛物线的位置关系，确定 A,B,P 三点的位置关系，利用共线向量表示出 A,B 两点的坐标，再根据两点都在抛物线上可联立方程组根据方程是否有根确定 P 点是否存在，即可得出结果.

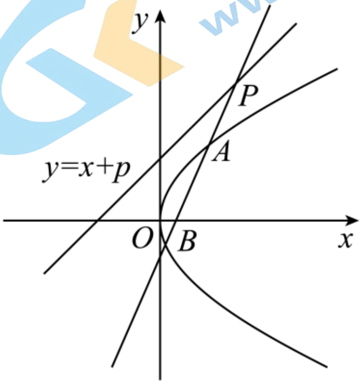
【详解】由题意可知，将直线 $l:y=x+p$ 和抛物线 $y^2=2px$ 联立消去 x 整理得，

$y^2-2py+2p^2=0$；

此时该方程 $\Delta=4p^2-8p^2=-4p^2<0$，即该方程无解；

可得直线 $l:y=x+p$ 和抛物线无交点，

过 P 的直线交抛物线于 A,B 两点，由几何关系可知，A,B 在 P 点的同侧，如下图所示：



不妨设 $P(x_0,x_0+p),A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$，

由 $2|PA|=|AB|$ 可得 $2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，即 $\begin{cases}2(x_A-x_0)=x_B-x_A\\2(y_A-x_0-p)=y_B-y_A\end{cases}$；

所以 $B(3x_A-2x_0,3y_A-2x_0-2p)$，

又因为 A,B 在抛物线上，所以 $\begin{cases}{y_A}^2=2px_A\\(3y_A-2x_0-2p)^2=2p(3x_A-2x_0)\end{cases}$

消去 x_A 并整理得 $2{x_0}^2+6(p-y_A)x_0+3{y_A}^2+2p^2-6py_A=0$

此时关于 x_0 的一元二次方程

$\Delta=36(p-y_A)^2-8(3{y_A}^2+2p^2-6py_A)=12{y_A}^2-24py_A+20p^2=12(y_A-p)^2+8p^2>0$ 恒成立，

即 x_0 恒有解，

也就是对于直线 $l:y=x+p$ 上任意一点 P，过 P 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于 A,B 两点，都有 $2|PA|=|AB|$，所以 A 正确.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题以新定义的形式考察直线和圆锥曲线的位置关系，关键是将点在直线和抛物线上是否满足一定条件的问题转化成方程解的存在性问题，注意等价转化方能找到题眼求解.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【详解】最短弦为过点$(3,1)$与圆心连线的垂线与圆相交而成，$d=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$，所以最短弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}.$

【考点定位】本题考查直线和圆的位置关系，考查数形结合思想和运算能力. 圆的半径、弦心距、半弦构成的直角三角形在解决直线和圆问题常常用到，本题只需要简单判断最短弦的位置就能轻松解答,有时候可能会出现点到直线的距离公式来求弦心距的长度.

12. 【答案】-2

【解析】

【分析】令$x=0$，可得$a_0=1$，令$x=1$，可得$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$，即可得答案.

【详解】解：令$x=0$，则有$a_0=1$，

令$x=1$，则有$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$，

所以$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1-a_0=-1-1=-2$.

故答案为：-2

13. 【答案】36

【解析】

【分析】根据题意分成三种情况，分别根据定序问题查出各类所包含的情况数，进而求出所有组成的不同四位数.

【详解】已知用$1,2,3$三个数字组成一个四位数且每个数字至少出现一次，

所以包含一下三种形式：

①两个 1，一个 2，一个 3；

②一个 1，两个 2，一个 3；

③一个 1，一个 2，两个 3.

其余情况①可以组成$\frac{A_4^4}{A_2^2}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1}=12$种情况.

同理情况②③均可以组成12种情况.

因此一共可以组成36个不同数字.

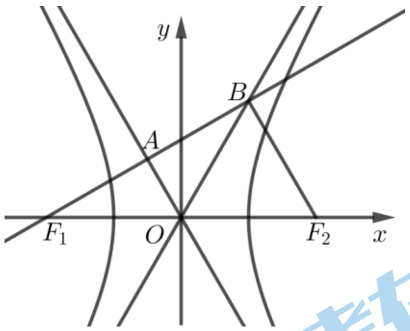
故答案　：36

14. 【答案】2.

【解析】

【分析】通过向量关系得到 $F_1A=AB$ 和 $OA\perp F_1A$，得到 $\angle AOB=\angle AOF_1$，结合双曲线的渐近线可得 $\angle BOF_2=\angle AOF_1$, $\angle BOF_2=\angle AOF_1=\angle BOA=60^0$, 从而由 $\dfrac{b}{a}=\tan 60^0=\sqrt{3}$ 可求离心率.

【详解】如图，



由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, 得 $F_1A=AB$. 又 $OF_1=OF_2$, 得 OA 是三角形 F_1F_2B 的中位线，即 $BF_2//OA, BF_2=2OA$. 由 $\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0$，得 $F_1B\perp F_2B, OA\perp F_1A$, 则 $OB=OF_1$ 有 $\angle AOB=\angle AOF_1$，

又 OA 与 OB 都是渐近线，得 $\angle BOF_2=\angle AOF_1$, 又 $\angle BOF_2+\angle AOB+\angle AOF_1=\pi$，得 $\angle BOF_2=\angle AOF_1=\angle BOA=60^0$,. 又渐近线 OB 的斜率为 $\dfrac{b}{a}=\tan 60^0=\sqrt{3}$，所以该双曲线的离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2.$$

【点睛】本题考查平面向量结合双曲线的渐进线和离心率，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养．采取几何法，利用数形结合思想解题．

15. 【答案】2^n-1;32

【解析】

【详解】试题分析：由已知中的数据

第1行			1	1		
第2行		1	0	1		
第3行		1	1	1	1	
第4行	1	0	0	0	1	
第5行	1	1	0	0	1	1
	…	…		…	…	

全行都为 1 的是第 2^n-1 行；$\because n=6\Rightarrow 2^6-1=63$，故第 63 行共有 64 个 1，逆推知第 62 行共有 32 个 1，第 61 行共有 32 个 1．故答案为 2^n-1,32 .

考点：归纳推理．

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) 证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

（3）$\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

【解析】

【分析】（1）由线线平行证 MF∥平面 BDE、NF∥平面 BDE，即可依次证平面 MNF∥平面 BDE、MN∥平面 BDE；

（2）以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$，由向量法求线面角；

（3）由向量法求 MA 与平面 EMN 的夹角 α 的正弦值，则点 A 到平面 EMN 的距离为 $\left|\overrightarrow{MA}\right|\sin\alpha$.

【小问 1 详解】

证明：取 AB 中点 F，连接 MF、NF，

$\because M$ 是线段 AD 的中点，$\therefore MF//BD$，$\because BD\subset$ 平面 BDE，$MF\not\subset$ 平面 BDE，$\therefore MF$∥平面 BDE.

$\because$ 点 D,E,N 分别为棱 PA,PC,BC 的中点，$\therefore NF\parallel AC\parallel DE$，$\because DE\subset$ 平面 BDE，$NF\not\subset$ 平面 BDE，$\therefore NF$∥平面 BDE.

$\because MF\cap NF=F$，$\therefore MF$、$NF\subset$ 平面 MNF，$\therefore$ 平面 MNF∥平面 BDE，

$\because MN\subset$ 平面 MNF，$\therefore MN$∥平面 BDE.

【小问 2 详解】

$\because PA\perp$ 底面 $ABC,\angle BAC=90^\circ$，以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$，

则有 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(0,4,0),M(0,0,1),N(1,2,0),E(0,2,2)$，

$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1),\overrightarrow{ME}=(0,2,1),\overrightarrow{AC}=(0,4,0)$，

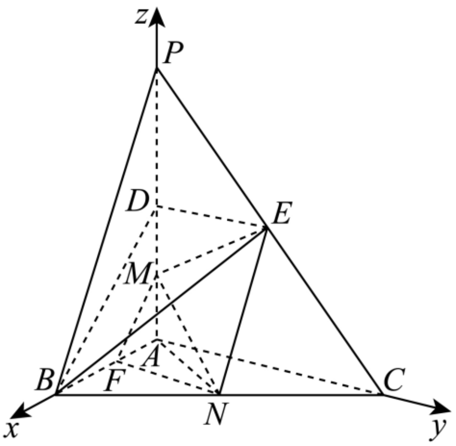
设平面 EMN 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=x+2y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ME}=2y+z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则有 $\vec{n}=\ -4,1,-2\ $，

设 AC 与平面 EMN 所成角为 θ，则直线 AC 与平面 EMN 的夹角的正弦值为 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AC}\right\rangle\right|=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{21}\times4}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

【小问 3 详解】

由（2）得，$\overrightarrow{MA}=\ 0,0,-1\ $，设 MA 与平面 EMN 所成角为 α，

则点 A 到平面 EMN 的距离为 $\left|\overrightarrow{MA}\right|\sin\alpha=\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{MA}\right\rangle\right|=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}}{\left|\vec{n}\right|}=1\times\dfrac{2}{\sqrt{21}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.



17. 【答案】(I)(i) $\frac{1}{5}$.;(ii) $\frac{7}{10}$.　(II) X 的分布列见解析，数学期望 $\frac{5}{7}$

【解析】

【详解】解：(1)①设"在一次游戏中摸出 i 个白球"为事件 $A_i(i=0,1,2,3)$，则 $P(A_3)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{5}$.

②设"在一次游戏中获奖"为事件 B，则 $B=A_2\cup A_3$，又

$P(A_2)=\frac{C_3^2C_2^2}{C_5^2C_3^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{1}{2}$，且 A_2，A_3 互斥，所以 $P(B)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$.

(2)由题意可知 X 的所有可能取值为 0,1,2,

$P(X=0)=\left(1-\frac{7}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$,

$P(X=1)=C_2^1\cdot\frac{7}{10}\left(1-\frac{7}{10}\right)=\frac{21}{50}$,

$P(X=2)=\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{49}{100}$,

所以 X 的分布列是

X	0	1	2
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{9}{100}+1\times\frac{21}{50}+2\times\frac{49}{100}=\frac{7}{5}$.

18. 【答案】(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$;

(2) $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1)由已知，将椭圆方程转化为标准形式，确定其长轴、短轴，并求出参数 m 的值，从而求出椭

圆方程及其离心率；

（2）根据题意，易知 $BD \perp AP$，通过动点 P 的坐标求出点 B 的坐标，将四边形 $OPAB$ 分割成三角形 OPA 和三角形 OAB 进行运算即可.

【小问 1 详解】

由题意知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{3m}}=1$，

所以 $a^2=\dfrac{1}{m}$，$b^2=\dfrac{1}{3m}$，

故 $2a=2\sqrt{\dfrac{1}{m}}=2\sqrt{6}$，

解得 $m=\dfrac{1}{6}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

因为 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 2 详解】

设线段 AP 的中点为 D.

因为 $BA=BP$，所以 $BD \perp AP$.

由题意知直线 BD 的斜率存在，

设点 P 的坐标为 $(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，

则点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{x_0+3}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$，直线 AP 的斜率 $k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0-3}$，

所以直线 BD 的斜率 $k_{BD}=-\dfrac{1}{k_{AP}}=\dfrac{3-x_0}{y_0}$，

故直线 BD 的方程为 $y-\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{3-x_0}{y_0}\left(x-\dfrac{x_0+3}{2}\right)$.

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0}$，故 $B\left(0,\dfrac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0}\right)$.

由 $\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，得 $x_0^2=6-3y_0^2$，化简得 $B\left(0,\dfrac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right)$.

因此，$S_{四边形OPAB}=S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OAB}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times|y_0|+\frac{1}{2}\times 3\times\left|\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|$

$=\frac{3}{2}\left(|y_0|+\left|\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|\right)$

$=\frac{3}{2}\left(2|y_0|+\frac{3}{2|y_0|}\right)$

$\geq\frac{3}{2}\times 2\sqrt{2|y_0|\times\frac{3}{2|y_0|}}$

$=3\sqrt{3}$.

当且仅当$2|y_0|=\frac{3}{2|y_0|}$时，即$y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$时等号成立.

故四边形$OPAB$面积的最小值为$3\sqrt{3}$.

19. 【答案】（1）详见解析；

（2）60°；

（3）存在，$\frac{AN}{AC}=\frac{3}{8}$或$\frac{AN}{AC}=\frac{7}{8}$.

【解析】

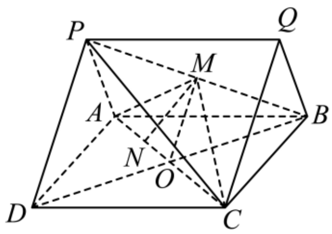
【分析】（1）设$AB\bigcap CD=O$，根据线面平行的性质可得$PD//OM$，进而即得；

（2）取AD的中点G，根据线面垂直的判定定理可得$PG\perp$平面$ABCD$，然后利用坐标法利用面面角的向量求法即得；

（3）设$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AC}$，利用线面角的向量求法结合条件即得.

【小问 1 详解】

设$AC\cap BD=O$，连接OM，



因为侧面$ABCD$为正方形，

所以O为BD的中点，

因为$PD//$平面MAC，$PD\subset$平面PBD，平面$PBD\bigcap$平面$MAC=OM$，

所以$PD//OM$，又O为BD的中点，

所以M为PB的中点；

【小问 2 详解】

因为 $AB // DC, DC \perp DP$，

所以 $AB \perp DP$，又 $AB \perp AP, AP \cap DP = P, AP \subset$ 平面 ADP， $DP \subset$ 平面 ADP，

所以 $AB \perp$ 平面 ADP，

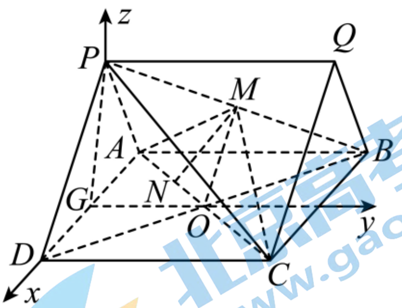
取 AD 的中点 G，则 $PG \perp AD$，

由 $AB \perp$ 平面 ADP， $PG \subset$ 平面 ADP，可得 $AB \perp PG$，

又 $AB \cap AD = A, AB \subset$ 平面 $ABCD$， $AD \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PG \perp$ 平面 $ABCD$，

如图以 G 为原点建立空间直角坐标系，



则 $D(2,0,0), A(-2,0,0), P(0,0,\sqrt{2}), C(2,4,0), B(-2,4,0), M\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{BD}=(4,-4,0), \overrightarrow{PD}=(2,0,-\sqrt{2})$,

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=4x-4y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=2x-\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\vec{m}=(1,1,\sqrt{2})$,

又平面 ADP 的法向量可取 $\vec{n}=(0,1,0)$,

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$,

所以二面角 $B-PD-A$ 的大小为 60°；

【小问 3 详解】

假设在线段 AC 上存在点 N，使得直线 MN 与平面 BDP 所成的角为 30°，

设 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AC}$，因为 $A(-2,0,0), C(2,4,0), \overrightarrow{AC}=(4,4,0)$,

所以 $\overrightarrow{AN}=(4\lambda,4\lambda,0)$， $N(4\lambda-2,4\lambda,0)$，又 $M\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(4\lambda-1,4\lambda-2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，又平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,1,\sqrt{2})$,

所以$\left|\cos\left\langle \vec{m},\overrightarrow{MN}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{MN}\right|}\right|=\dfrac{\left|4\lambda-1+4\lambda-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\right|}{2\sqrt{(4\lambda-1)^2+(4\lambda-2)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\dfrac{1}{2}$,

整理可得$64\lambda^2-40\lambda+21=0$,

解得$\lambda=\dfrac{3}{8}$或$\lambda=\dfrac{7}{8}$,

所以在线段AC上存在点N,使得直线MN与平面BDP所成的角为30°,$\dfrac{AN}{AC}$的值为$\dfrac{3}{8}$或$\dfrac{7}{8}$.

20. 【答案】(1)$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(2)5

【解析】

【分析】(1)设出椭圆方程,根据短轴长和离心率,求出a,b,c,写出方程即可;

(2)先考虑斜率不存在的情况,设直线方程,求出M,N两点坐标,列出关于$\triangle OMN$的面积,进而求出$|OM|^2+|ON|^2$的值,再考虑斜率存在的情况,设出直线方程,判别式大于零,韦达定理,求出点O到直线的距离,进而求出$\triangle OMN$的面积使其为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,可得直线中关于参数的等式,再列出$|OM|^2+|ON|^2$的式子,进行化简求值即可.

【小问1详解】

解:由题知,设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$,

因为短轴长为$2\sqrt{2}$,

所以$b=\sqrt{2}$,

因为离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

所以$\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

解得:$a=\sqrt{3},c=1$,

故椭圆方程为:$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$;

【小问2详解】

由题知当直线l斜率不存在时,

不妨设$l:x=n,-\sqrt{3}<n<\sqrt{3}$,

将 $x=n$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$,

可得 $y=\pm\sqrt{2-\frac{2n^2}{3}}$,$-\sqrt{3}<n<\sqrt{3}$,

不妨假设 $M\left(n,\sqrt{2-\frac{2n^2}{3}}\right)$, $N\left(n,-\sqrt{2-\frac{2n^2}{3}}\right)$,

则 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot|n|=|n|\sqrt{2-\frac{2n^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

化简可得: $n^2=\frac{3}{2}$, $n=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,

此时 $M\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$, $N\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},-1\right)$,

故 $|OM|^2+|ON|^2=\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+1^2+\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+(-1)^2=5$,

当直线 l 斜率存在时,

不妨设 $l:y=kx+m$

$M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$,

即 $(2+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$,

$\Delta=(6km)^2-4(2+3k^2)(3m^2-6)>0$,

解得: $2+3k^2>m^2$,

由韦达定理得: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-6km}{2+3k^2}\\ x_1\cdot x_2=\frac{3m^2-6}{2+3k^2}\end{cases}$,

因为 $O(0,0)$,

则点 O 到直线 $y=kx+m$ 的距离为: $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-6km}{2+3k^2}\right)^2-\frac{4\left(3m^2-6\right)}{2+3k^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{2+3k^2}\cdot\sqrt{36k^2m^2-4\left(3m^2-6\right)\left(2+3k^2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{2+3k^2}\cdot\sqrt{24\left(3k^2+2-m^2\right)},$$

所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+k^2}}{2+3k^2}\cdot\sqrt{24\left(3k^2+2-m^2\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

化简可得: $3k^2+2=2m^2>m^2$,满足题意,

所以 $x_1+x_2=\frac{-3k}{m}, x_1\cdot x_2=\frac{3m^2-6}{2m^2}$,

故有 $y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2m=\frac{2}{m}$,

$$y_1\cdot y_2=\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)$$

$$=k^2x_1\cdot x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2$$

$$=k^2\frac{3m^2-6}{2m^2}+km\cdot\left(\frac{-3k}{m}\right)+m^2$$

$$=\frac{2}{m^2}-1,$$

则 $|OM|^2+|ON|^2=x_1{}^2+y_1{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2$

$$=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2+\left(y_1+y_2\right)^2-2y_1\cdot y_2$$

$$=\left(\frac{-3k}{m}\right)^2-2\frac{3m^2-6}{2m^2}+\left(\frac{2}{m}\right)^2-2\left(\frac{2}{m^2}-1\right)$$

$$=\frac{9k^2}{m^2}-\frac{3m^2-6}{m^2}+\frac{4}{m^2}-\frac{4}{m^2}+2$$

$$=\frac{9k^2-m^2+6}{m^2}$$

$$=\frac{5m^2}{m^2}$$

$$=5,$$

综上: $|OM|^2+|ON|^2$ 为定值 5.

【点睛】思路点睛:本题考查直线与圆锥曲线的综合应用中的定值问题,关于定值的问题思路有:

(1)先根据题意考虑特殊情况,斜率不存在,或斜率为零;

(2)根据特殊情况求出定值;

(3)设普通的直线方程,联立方程组;

(4)判别式大于零,韦达定理;

(5)根据题意建立关于 $x_1+x_2, x_1\cdot x_2$ 的等式;

(6)写出需要求的式子,用 $x_1+x_2, x_1\cdot x_2$ 代换,化简即可.

21. 【答案】(1)①相关;②不相关.(2)(ⅰ) $4n^2+5$ 个(ⅱ)$8n-1$.

【解析】

【分析】(1)根据所给定义，代入不等式化简变形可得对应坐标满足的关系，即可判断所给两个点的坐标是否符合定义要求.

(2)(ⅰ)根据所给点集，依次判断在四个象限内满足的点个数，坐标轴上及原点的个数，即可求得集合 Ω_n 中与点 $A(1,1)$ 相关的点的个数;(ⅱ)由(1)可知相关点满足 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)\geq 0$，利用分类讨论证明 $\left|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\right|\geq 1$，即可求得 S 中元素个数的最大值.

【详解】若点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 相关，则 $A'(x_1,y_2)$，$B(x_2,y_1)$，而 $\|OP\|=|x|+|y|$，

不妨设 $x_1\geq 0, y_1\geq 0, x_2\geq 0, y_2\geq 0$，

则由定义 $\|OA\|^2+\|OB\|^2\geq\|OA'\|^2+\|OB'\|^2$ 可知 $(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2\geq(x_1+y_2)^2+(x_2+y_1)^2$，

化简变形可得 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)\geq 0$，

(1)对于① $A(-2,1)$，$B(3,2)$；对应坐标取绝对值，代入可知 $(2-3)(1-2)\geq 0$ 成立，因此相关;

②对应坐标取绝对值，代入可知 $(4-2)(3-4)<0$，因此不相关.

(2)(ⅰ)在第一象限内，$(x-1)(y-1)\geq 0$，可知 $1\leq x\leq n$ 且 $1\leq y\leq n$，有 n^2 个点;同理可知，在第二象限、第三象限、第四象限也各有 n^2 个点.

在 x 轴正半轴上，点 $(1,0)$ 满足条件;在 x 轴负半轴上，点 $(-1,0)$ 满足条件;

在 y 轴正半轴上，点 $(0,1)$ 满足条件;在 y 轴负半轴上，点 $(0,-1)$ 满足条件;

原点 $(0,0)$ 满足条件;

因此集合 Ω_n 中共有 $4n^2+5$ 个点与点 $A(1,1)$ 相关.

(ⅱ)若两个不同的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 相关，其中 x_1，$x_2\geq 0$，y_1，$y_2\geq 0$，

可知 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)\geq 0$.

下面证明 $\left|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\right|\geq 1$.

若 $x_1=x_2$，则 $y_1\neq y_2$，成立;

若 $x_1>x_2$，则 $y_1\geq y_2$，

若 $x_1 < x_2$，则 $y_1 \le y_2$，亦成立.

由于 $\left|\left(x_1+y_1\right)-\left(x_2+y_2\right)\right| \le (n+n)-(0+0)=2n$，

因此最多有 $2n+1$ 个点两两相关，其中最多有 $2n-1$ 个点在第一象限；最少有 1 个点在坐标轴正半轴上，一个点为原点.

因此 S 中元素个数的最大值为 $4(2n-1)+2\cdot 1+1=8n-1$.

【点睛】本题考查了集合中新定义的应用，对题意的理解与分析能力的要求较高，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。