北京市西城区 2018 — 2019 学年度第一学期期末试卷

高一数学

2019.1

试卷满分：150 分　考试时间：120 分钟

A 卷 [三角函数与平面向量]　　　本卷满分：100 分

题号	一	二	三			本卷总分
			17	18	19	
分数						

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1．$\sin(-\frac{\pi}{3})=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．函数 $f(x)=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期为（　　）

（A）π　　（B）2π　　（C）4π　　（D）6π

3．如果向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，那么 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$（　　）

（A）6　　（B）5　　（C）4　　（D）3

4．$\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=$（　　）

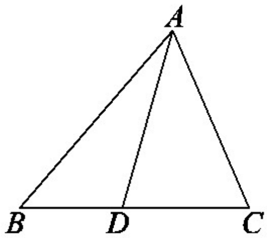
（A）$\tan\alpha$　　（B）$-\tan\alpha$　　（C）1　　（D）-1

5．已知函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在区间 I 上都是减函数，那么区间 I 可以是（　　）

（A）$(0,\frac{\pi}{2})$　　（B）$(\frac{\pi}{2},\pi)$　　（C）$(\pi,\frac{3\pi}{2})$　　（D）$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

6．如图，在△ABC中，D是BC上一点，

则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=$（　　）



（A）$\overrightarrow{BD}$	（B）$\overrightarrow{DB}$	（C）$\overrightarrow{CD}$	（D）$\overrightarrow{DC}$

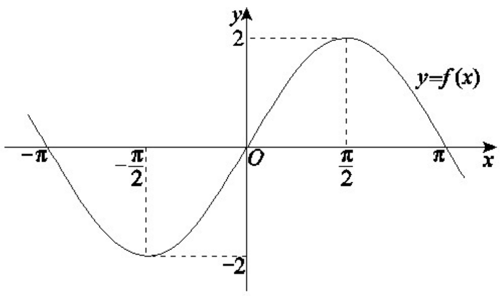
7．已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为单位向量，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，那么向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角是（　　）

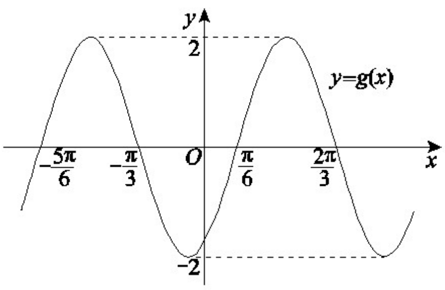
（A）$\dfrac{\pi}{4}$	（B）$\dfrac{\pi}{2}$	（C）$\dfrac{2\pi}{3}$	（D）$\dfrac{3\pi}{4}$

8．设$\alpha\in[0,2\pi)$，则使$\sin\alpha>\dfrac{1}{2}$成立的α的取值范围是（　　）

（A）$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$	（B）$(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$	（C）$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3})$	（D）$(\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6})$

9．已知函数 $f(x$





，$g(x)=A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$，其图象如下图所示．

为得到函数$g(x)$的图象，只需先将函数$f(x)$图象上各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变），再

（A）向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位　　（B）向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位

（C）向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位　　（D）向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位

10．在△ABC中，$A=\frac{\pi}{2}$，$AB=2$，$AC=1$．D是BC边上的动点，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围是（　　）

（A）$[-4,1]$	（B）$[1,4]$	（C）$[-1,4]$	（D）$[-4,-1]$

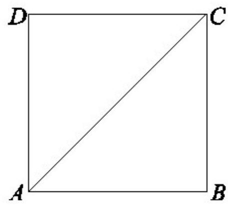
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.把答案填在题中横线上.

11．若$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，且θ为第三象限的角，则$\tan\theta=$______.

12．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$．与向量$\boldsymbol{a}$共线的一个非零向量的坐标可以是______.

13．如果$\tan(x+\frac{\pi}{3})=0\ (x>0)$，那么$x$的最小值是______.

14．如图，已知正方形$ABCD$．若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，其中$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，则$\frac{\lambda}{\mu}=$______.



15．在直角坐标系xOy中，已知点$A(3,3)$，$B(5,1)$，$P(2,1)$，M是坐标平面内的一点.

① 若四边形$APBM$是平行四边形，则点M的坐标为______；

② 若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$，则点$M$的坐标为______.

16. 设函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$. 若$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，则$\omega$的取值集合是______.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 12 分）

已知$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

（Ⅰ）求$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$的值；

（Ⅱ）求$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$的值.

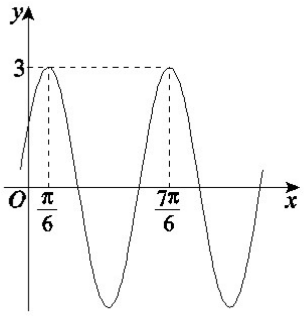
18．（本小题满分 12 分）

函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示，其中$A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅲ）写出 $f(x)$ 的单调递增区间．



19．（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-1,0)$， $B(0,\sqrt{3})$， $C(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$．

（Ⅰ）求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值；

（Ⅱ）是否存在 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使得△ ABC 为钝角三角形？若存在，求出 θ 的取值范围；若不存在，说明理由．

B 卷　[学期综合]本卷满分：50 分

题号	一	二			本卷总分
		6	7	8	
分数					

一、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．把答案填在题中横线上．

1．若集合 $A=\{x\,|\,0<x<3\}$， $B=\{x\,|\,-1<x<2\}$，则 $A\cup B=$______．

2．函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2 x}$ 的定义域为______．

3．已知三个实数 $a=3^{\frac{1}{2}}$， $b=\sqrt{2}$， $c=\log_3 2$．将 a,b,c 按从小到大排列为______．

4．里氏震级 M 的计算公式为： $M=\lg A-\lg A_0$，其中 $A_0=0.005$ 是标准地震的振幅， A 是测震仪记录的地震曲线的最大振幅．在一次地震中，测震仪记录的地震曲线的最大振幅是 500，则此次地震的里氏震级为______级；8级地震的最大振幅是5级地震

最大振幅的______倍.

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & -2\leqslant x\leqslant c, \\ x^{-1}, & c<x\leqslant 3. \end{cases}$ 若 $c=0$，则 $f(x)$ 的值域是____；若 $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{1}{4},2]$，则实数 c 的取值范围是______.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

6．（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

（Ⅰ）证明： $f(x)$ 是奇函数；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上的单调性，并用函数单调性的定义加以证明.

7．（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=ax^2+x$ 定义在区间 $[0,2]$ 上，其中 $a\in[-2,0]$.

（Ⅰ）若 $a=-1$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值.

8．（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D．若对于任意 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)+f(x_2)<2f(\frac{x_1+x_2}{2})$，则称函数 $f(x)$ 为“凸函数”.

（Ⅰ）判断函数 $f_1(x)=2x$ 与 $f_2(x)=\sqrt{x}$ 是否为“凸函数”，并说明理由；

（Ⅱ）若函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b$（a,b 为常数）是“凸函数”， 求 a 的取值范围；

（Ⅲ）写出一个定义在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上的“凸函数” $f(x)$，满足 $0<f(x)<x$.（只需写出结论）

北京市西城区 2018— 2019 学年度第一学期期末试卷

高一数学参考答案及评分标准 2019.1

A 卷[三角函数与平面向量]　满分 100 分

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. D　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D　7. D　8. B　9. A　10. A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. $\sqrt{3}$　　12. $(2,4)$ （答案不唯一）　　13. $\dfrac{2\pi}{3}$

14. -1　　15. $(6,3)$；$(4,2)$　　16. $\{\omega \mid \omega = 6k+1, k\in \mathbf{Z}\}$

注：第 15 题每空 2 分.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）**解**：因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ……………………2 分

$=\dfrac{4}{5}$. ……………………3 分

所以 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)$ ……………………5 分

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. ……………………6 分

（Ⅱ）**解**：因为 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ……………………8 分

$=\dfrac{3}{4}$. ……………………9 分

所以 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}+\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ ……………………11 分

$=\dfrac{79}{10}$. ……………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）**解**：由图象可知 $A=3$. ……………………1 分

因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{7\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\pi$，

所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$． …………………3 分

令 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$， 解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，适合 $|\varphi|<\pi$．

所以 $f(x)=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$． …………………5 分

（Ⅱ）解：因为 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}]$． …………………6 分

所以，当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{13\pi}{6}$，即 $x=\pi$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{3}{2}$； …………………8 分

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -3． …………………10 分

（Ⅲ）解：$f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}]$（$k\in\mathbf{Z}$）． …………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）解：$\overrightarrow{AC}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$，$\overrightarrow{BC}=(\cos\theta,\sin\theta-\sqrt{3})$． …………………2 分

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\cos\theta+1)\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot(\sin\theta-\sqrt{3})$ …………………3 分

$=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1$

$=2\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})+1$． …………………4 分

因为 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，所以 $\theta+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}]$． …………………5 分

所以 当 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，即 $\theta=0$ 时，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 取得最大值 2． …………………6 分

（Ⅱ）解：因为 $|AB|=2$，　$|AC|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2+2\cos\theta}$，

$|BC|=\sqrt{\cos^2\theta+(\sin\theta-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}$．

又 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，所以 $\sin\theta\in[0,1]$，$\cos\theta\in[0,1]$，

所以 $|AC|\leqslant 2$，$|BC|\leqslant 2$．

所以 若△ABC 为钝角三角形，则角 C 是钝角，从而 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0$． ………………8 分

由（Ⅰ）得 $2\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})+1<0$，解得 $\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})<-\dfrac{1}{2}$． …………………9 分

所以 $\theta+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}]$， 即 $\theta\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$． …………………11 分

反之，当 $\theta\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0$，

又 A,B,C 三点不共线，所以 △ABC 为钝角三角形．

综上，当且仅当$\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$时，$\triangle ABC$为钝角三角形. ……………………12

分

B 卷　[学期综合]　满分 50 分

一、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

1. $\{x \mid -1 < x < 3\}$　　2. $\{x \mid 0 < x < 1$，或$x > 1\}$　　3. $c < b < a$

4. 5；1000　　5. $[-\frac{1}{4}, +\infty)$；$[\frac{1}{2}, 1]$

注：第 4 题、第 5 题每空 2 分.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分.

6.（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）**解**：函数$f(x)$的定义域为$D = \{x \mid x \neq \pm 1\}$. ……………………1 分

对于任意$x \in D$，因为 $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -f(x)$， ……………………3 分

所以 $f(x)$是奇函数. ……………………4 分

（Ⅱ）**解**：函数$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$在区间$(-1, 1)$上是减函数. ……………………5 分

证明：在$(-1, 1)$上任取x_1，x_2，且 $x_1 < x_2$， ……………………6 分

则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 - 1} - \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{(1 + x_1 x_2)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$. ……………………8 分

由 $-1 < x_1 < x_2 < 1$，得 $1 + x_1 x_2 > 0$，$x_2 - x_1 > 0$，$x_1^2 - 1 < 0$，$x_2^2 - 1 < 0$，

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$.

所以 函数$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$在区间$(-1, 1)$上是减函数. ……………………10 分

7.（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）**解**：当$a = -1$时， $f(x) = -x^2 + x = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$. ……………………2 分

所以 $f(x)$在区间$(0, \frac{1}{2})$上单调递增，在$(\frac{1}{2}, 2)$上$f(x)$单调递减.

因为 $f(0) = 0$， $f(2) = -2$，

所以 $f(x)$的最小值为-2 . ……………………4 分

（Ⅱ）**解**：① 当$a = 0$时， $f(x) = x$.

所以 $f(x)$在区间$[0, 2]$上单调递增，

所以 $f(x)$的最大值为$f(2) = 2$. ……………………5 分

当 $-2 \leqslant a < 0$ 时，函数 $f(x) = ax^2 + x$ 图像的对称轴方程是 $x = -\frac{1}{2a}$． ………6 分

② 当 $0 < -\frac{1}{2a} \leqslant 2$，即 $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(-\frac{1}{2a}) = -\frac{1}{4a}$． ………8 分

③ 当 $-\frac{1}{4} < a < 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 4a + 2$． ……………………9 分

综上，当 $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(-\frac{1}{2a}) = -\frac{1}{4a}$；

当 $-\frac{1}{4} < a \leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $4a + 2$． ……………………10 分

8.（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）**解**：对于函数 $f_1(x) = 2x$，其定义域为 $\mathbf{R}$．

取 $x_1 = 0, x_2 = 1$，有 $f(x_1) + f(x_2) = f(0) + f(1) = 2$，$2f(\frac{x_1 + x_2}{2}) = 2f(\frac{1}{2}) = 2$，

所以 $f(x_1) + f(x_2) = 2f(\frac{x_1 + x_2}{2})$，所以 $f_1(x) = 2x$ 不是“凸函数”． …………2 分

对于函数 $f_2(x) = \sqrt{x}$，其定义域为 $[0, +\infty)$．

对于任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$，且 $x_1 \neq x_2$，由

$$[f(x_1) + f(x_2)]^2 - [2f(\frac{x_1 + x_2}{2})]^2 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 - (2\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}})^2 = -(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 < 0,$$

所以 $[f(x_1) + f(x_2)]^2 < [2f(\frac{x_1 + x_2}{2})]^2$．

因为 $f(x_1) + f(x_2) > 0$，$2f(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0$，

所以 $f(x_1) + f(x_2) < 2f(\frac{x_1 + x_2}{2})$，所以 $f_2(x) = \sqrt{x}$ 是“凸函数”． ……………4 分

（Ⅱ）**解**：函数 $f(x) = a \cdot 2^x + b$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．

对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，且 $x_1 \neq x_2$，

$$f(x_1) + f(x_2) - 2f(\frac{x_1 + x_2}{2})$$

$$= (a \cdot 2^{x_1} + b) + (a \cdot 2^{x_2} + b) - 2(a \cdot 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}} + b)$$ ……………………5 分

$$= a(2^{x_1} + 2^{x_2} - 2 \times 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}})$$

$$= a(2^{\frac{x_1}{2}} - 2^{\frac{x_2}{2}})^2.$$ ……………………7 分

依题意，有 $a(2^{\frac{x_1}{2}} - 2^{\frac{x_2}{2}})^2 < 0$．

因为 $(2^{\frac{x_1}{2}}-2^{\frac{x_2}{2}})^2>0$，所以 $a<0$． ························8 分

（III）$f(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}$ $(x>\dfrac{1}{2})$．（注：答案不唯一） ························10 分