

文科数学参考解答及评分参考

1. C 2. A 3. C 4. B 5. B 6. A 7. D 8. D 9. B 10. C 11. C 12. A

13. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 14. 2 15. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 16. $3+2\sqrt{2}$

17. 解析: (1) 由题,

$$\text{得 } K^2 = \frac{200 \times (20 \times 50 - 30 \times 100)^2}{50 \times 150 \times 120 \times 80} = \frac{100}{9} \approx 11.11 > 6.635, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因此, 有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 这 6 名客户中男性有 4 人, 记为 A_1, A_2, A_3, A_4 , 女性有 2 名, 记为 B_1, B_2 . $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

从这 6 名客户中选取 2 名客户的所有基本事件有: $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, A_4), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_4, B_1), (A_4, B_2), (B_1, B_2)$, 共 15 个. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

其中, 至少有一名女性客户的基本事件有 9 个. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以, 抽取的 2 名客户中至少有 1 名女性客户的概率为 $\frac{9}{15}$, 即 $\frac{3}{5}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

18. 解析: (1) 由已知 $a_1 + a_2 + 2 + a_3 + 4 = 12$, 所以 $a_1 = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 由 $b_1 = 3, b_3 = b_2 = 18$

$$\text{则 } 3q^2 = 3q - 18, \text{ 即 } q^2 - q - 6 = 0,$$

解得 $q = 3, q = -2$ (舍去),

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } c_n = \frac{4}{2n \cdot 2(n+1)} + 3^n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + 3^n. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + (3 + 3^2 + \dots + 3^n)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{3(1 - 3^n)}{1 - 3}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{n}{n+1} + \frac{3^{n+1} - 3}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解析: (1) 证明: 设 $PN \perp$ 平面 ABC 于点 N ,

过 N 作 $NE \perp AB$ 于 $E, NF \perp AC$ 于 F , 连接 PE, PF .

因为 $PN \perp$ 平面 ABC , $ABC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PN \perp AB$.

又因为 $NE \perp AB$, 所以 $AB \perp$ 平面 PNE , 所以 $AB \perp PE$, 同理 $AC \perp PF$ 2 分

在 $Rt\triangle PAE, Rt\triangle PAF$ 中, $\angle PAE = \angle PAF, PA = PA$,

故 $\triangle PAE \cong \triangle PAF$, 所以 $AF = AE$.

在 $Rt\triangle ANE, Rt\triangle ANF$ 中, $AF = AE, AN = AN$,

故 $\triangle ANE \cong \triangle ANF$, 所以 $NE = NF$ 4 分

即 N 到 AB, AC 的距离相等, 同理 N 到 BC, AC 的距离相等,

故 N 为 $\triangle ABC$ 的内心, N 与 H 重合.

所以 $PH \perp$ 平面 ABC .

又因为 $PH \subset$ 平面 APM , 所以平面 $PAM \perp$ 平面 ABC 6 分

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} r(3+4+5)$, 故 $r = 1$.

所以 $AH = \sqrt{r^2 + AE^2} = \sqrt{5}, PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = 2$ 8 分

因为 H 为 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 AH 平分 $\angle BAC$,

所以 $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}, BM + CM = 4$, 所以 $CM = \frac{5}{2}$,

故 $\triangle AMC$ 的面积为 $\frac{1}{2} CM \cdot AB = \frac{1}{4} \cdot 5$ 10 分

由于点 P 到平面 ABC 的距离为 $PH = 2$,

故三棱锥 $M-PAC$ 的体积为 $\frac{1}{3} S_{\triangle AMC} \cdot PH = \frac{5}{4}$ 12 分

20. 解析: (1) 椭圆经过点 A, T , 代入椭圆 E 的方程, 得 $\begin{cases} b^2 - 1, \\ \frac{64}{25a^2} + \frac{9}{25b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 2 分

由 $\angle MAT = \angle NAT$ 知 AM 与 AN 关于直线 $AT: y = x + 1$ 对称,

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$,

则 P_0 关于直线 $y = x + 1$ 对称的点为 $P'_0(y_0 - 1, x_0 + 1)$ 4 分

从而 $k_1 = k_{AP'_0} = \frac{y_0 - 1}{x_0 + 1}, k_2 = k_{AP_0} = \frac{y_0 + 1}{x_0 - 1}$,

于是 $k_1 k_2 = 1$ 5 分

(2) 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), AM: y = k_1 x + 1$,

由 $\begin{cases} y = k_1 x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(4k_1^2 + 1)x^2 + 8k_1 x = 0$, 所以 $x_1 = \frac{8k_1}{4k_1^2 + 1}$,

从而 $y_1 = k_1 x_1 + 1 = \frac{1 - 4k_1^2}{4k_1^2 + 1}$

同理 $x_2 = \frac{8k_2}{4k_2^2 + 1}, y_2 = \frac{1 - 4k_2^2}{4k_2^2 + 1}$

由(1)有 $k_1 k_2 = 1$, 故 $x_2 = \frac{8k_1}{4 + k_1^2}, y_2 = \frac{k_1^2 - 4}{4 + k_1^2}$ 7分

为方便, 记 $k = k$, 则 $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1} - \frac{k^2 - 4}{4 + k^2}}{\frac{1}{4k^2 + 1} - \frac{8}{4 + k^2}} = \frac{8 - 8k^4}{8k(3k^2 - 3) - 3k} = \frac{k^2 + 1}{3k}$ 9分

$MN: y - y_1 = k_{MN}(x - x_1)$,

所以 $y - \frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1} = \frac{k^2 + 1}{3k} \left(x - \frac{8k}{4k^2 + 1} \right)$,

即 $y = \frac{k^2 + 1}{3k} x - \frac{8(k^2 + 1)}{3(4k^2 + 1)} + \frac{1 - 4k^2}{4k^2 + 1} = \frac{k^2 + 1}{3k} x - \frac{5}{3}$ 11分

由此可知, 当 k 变化时, 直线 MN 过定点 $(0, -\frac{5}{3})$ 12分

21. 解析: (1) 由题 $f(x) = ae^x - x^2$ 得 $f'(x) = ae^x - 2x$,

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点,

所以方程 $f'(x) = 0$ 有两个不同实数根, 即方程 $a = \frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根, 2分

设 $u(x) = \frac{2x}{e^x}$, 则 $u'(x) = 2 - \frac{2x}{e^x}$,

知 $x < 1$ 时, $u'(x) > 0$, 则 $u(x)$ 单调递增, $x > 1$ 时, $u'(x) < 0$, 则 $u(x)$ 单调递减,

所以, $x = 1$ 时, $u(x)$ 取得极大值 $u(1) = \frac{2}{e}$,

又 $x < 0$ 时, $u(x) < 0$; $x > 0$ 时, $u(x) > 0$, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $u(x) \rightarrow 0$,

所以, 方程 $a = \frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根时, 有 $0 < a < \frac{2}{e}$.

即 $f(x)$ 有两个极值点时, a 的取值范围是 $(0, \frac{2}{e})$ 5分

(2) 由(1)可知, $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 是方程 $ae^x - 2x = 0$ 的两根,

且 $0 < a < \frac{2}{e}, 0 < x_1 < 1 < x_2$, 则有 $ae^{x_1} = 2x_1 > 0, ae^{x_2} = 2x_2 > 0$,

两式相除, 得 $e^{x_2 - x_1} = \frac{x_2}{x_1}$, 即有 $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1} > 0$,

由 $x_1 + \lambda x_2 \geq 2x_1 x_2$ 得, $(x_2 - x_1)(x_1 + \lambda x_2) \geq 2x_1 x_2 \ln \frac{x_2}{x_1}$, 7分

所以 $\lambda \geq \frac{2\ln t + \frac{1}{t} - 1}{t - 1}$, 令 $t = \frac{x_2}{x_1} \geq 3$,

令 $h(t) = \frac{2\ln t + \frac{1}{t} - 1}{t - 1}$ ($t \geq 3$), 则 $h'(t) = 3 \left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} - 2\ln t \right)$ ($t \geq 3$),

令 $\varphi(t) = 3 \left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} - 2\ln t \right)$ ($t \geq 3$),

则 $\varphi'(t) = -\frac{2}{t} + \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{-2t^2 + 4t - 2}{t^3} = \frac{2(t-1)^2}{t^3} < 0$, 9分

所以 $\varphi(t)$ 单调递减, 又 $\varphi(3) = 3 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3^2} - 2\ln 3 \right) = \frac{16 - 18\ln 3}{9} < 0$,

故 $t \geq 3$ 时, $\varphi(t) < 0$, 则 $h(t) = \frac{2\ln t + \frac{1}{t} - 1}{t - 1}$ 单调递减,

则 $h(t) \leq h(3) = \ln 3 - \frac{1}{3}$, 故 $\lambda \geq \ln 3 - \frac{1}{3}$.

所以 λ 的最小值为 $\ln 3 - \frac{1}{3}$ 12分

22. 解析: (1) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入 $4\rho^2 \sin^2 \theta - 3(\rho^2 - 1) = 0$, 得

$$4y^2 = 3(x^2 + y^2) - 3,$$

即曲线 C 的直角坐标方程为: $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ 5分

(2) 直线 l 的参数方程可改写为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 6分

代入曲线 C 的方程, 有 $3 \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)^2 - \left(\frac{1}{2}t \right)^2 = 3$,

整理得 $2t^2 + 6\sqrt{3}t + 9 = 0$ 7分

从而 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{3}$, $t_1 t_2 = \frac{9}{2}$, 8分

所以 $|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = 3$ 10分

23. 解析: (1) 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -2x + 3 - 2x - 1 \leq 6 - x$, 解得 $-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$;

当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = -2x + 3 + 2x + 1 \leq 6 - x$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$;

当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = 2x - 3 + 2x + 1 \leq 6 - x$, 解得 $\frac{3}{2} < x \leq \frac{8}{5}$,

综上所述,原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{8}{5}\right\}$ 5分

(2)由题 $f(x) = |2x-3| + |2x+1| \geq |2x-3-(2x+1)| = 4$, 当且仅当 $(2x-3)(2x+1) \leq 0$
即 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时取“等号”,故 $f(x)$ 的最小值 $T=4$, 即 $x+y+2z=4$.

证法 1:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{1}{10} [(x+1) + (y+1) + 2(z+2)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \right) \\ \geq \frac{1}{10} \left[\sqrt{(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} + \sqrt{(y+1) \cdot \frac{1}{y+1}} + \sqrt{2(z+2) \cdot \frac{2}{z+2}} \right] = \frac{16}{10} = \frac{8}{5},$$

当且仅当 $(x+1)^2 = (y+1)^2 = (z+2)^2$, 即 $x=y=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ 10分

证法 2:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{1}{10} [(x+1) + (y+1) + 2(z+2)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \right) \\ = \frac{1}{10} \left[6 + \frac{y+1}{x+1} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{2(z+2)}{x+1} + \frac{2(x+1)}{z+2} + \frac{2(z+2)}{y+1} + \frac{2(y+1)}{z+2} \right] \\ \geq \frac{1}{10} \left[6 + 2\sqrt{\frac{y+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{y+1}} + 2\sqrt{\frac{2(z+2)}{x+1} \cdot \frac{2(x+1)}{z+2}} + 2\sqrt{\frac{2(z+2)}{y+1} \cdot \frac{2(y+1)}{z+2}} \right] = \frac{8}{5}.$$

当且仅当 $\frac{y+1}{x+1} = \frac{x+1}{y+1}, \frac{2(z+2)}{x+1} = \frac{2(x+1)}{z+2}, \frac{2(z+2)}{y+1} = \frac{2(y+1)}{z+2}$ 取等号,

即 $x=y=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ 10分