2022 北京石景山高二（上）期末

数　　学

本试卷共 6 页，满分为 100 分，考试时间为 120 分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．直线 $x+y=0$ 的倾斜角为(　)

A. $45°$　　B. $60°$　　C. $90°$　　D. $135°$

2．点 $(5,-3)$ 到直线 $x+2=0$ 的距离等于(　)

A. 7　　B. 5　　C. 3　　D. 2

3．已知 m，n 是两条不同直线，α，β，γ 是三个不同平面，下列命题中正确的是(　)

A. 若 $m // \alpha$，$n // \alpha$，则 $m // n$

B. 若 $\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则 $\alpha // \beta$

C. 若 $m // \alpha$，$m // \beta$，则 $\alpha // \beta$

D. 若 $m \perp \alpha$，$n \perp \alpha$，则 $m // n$

4．已知平面 α 的法向量为 $(2,-4,-2)$，平面 β 的法向量为 $(-1,2,k)$，若 $\alpha // \beta$，则 $k=$(　)

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

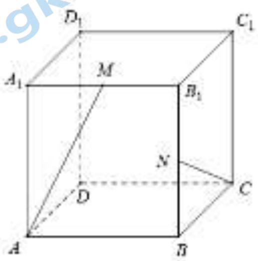
5．下列双曲线中以 $y=\pm 2x$ 为渐近线的是(　)

A. $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$　　B. $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　C. $y^2-\dfrac{x^2}{2}=1$　　D. $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

6. 若 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,3)$，$\boldsymbol{c}=(0,2,2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 的值为(　)

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 15

7．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点，那么直线 AM 与 CN 夹角的余弦值为(　)



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

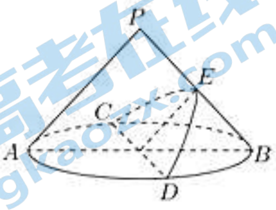
8．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$．过点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点．若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，则椭圆 C 的标准方程为(　)

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{7}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

9．已知直线 l：$kx-y+1-k=0$ 和圆 C：$x^2+y^2-4x=0$，则直线 l 与圆 C 的位置关系为(　)

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

10．我们知道：用平行于圆锥母线的平面(不过顶点)截圆锥，则平面与圆锥侧面的交线是抛物线的一部分.如图，在底面半径和高均为 2 的圆锥中，AB，CD 是底面圆的两条互相垂直的直径，E 是母线 PB 的中点，已知过 CD 与 E 的平面与圆锥侧面的交线是以 E 为顶点的圆锥曲线的一部分，则该圆锥曲线的焦点到其准线的距离等于(　).



A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. 1

第二部分（非选择题 共 60 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AD_1 的中点，则三棱锥 $M-ABC$ 的体积是__________.

12．如果直线 $m^2x+y=0$ 与直线 $x+my-1=0$ 垂直，那么 $m=$__________

13．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是 1，则直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成角的大小为__________.

14． P 为抛物线 $y=2x^2$ 上一动点，当点 P 到直线 $2x-y-4=0$ 的距离最短时， P 点的坐标是__________.

15. 在平面直角坐标系中，到两个定点 $A(0,1)$ 和 $B(0,-1)$ 的距离之积等于 2 的轨迹记作曲线 C.对于曲线 C，有下列四个结论：

① 曲线 C 是轴对称图形；

②曲线 C 是中心对称图形；

③曲线 C 上所有的点都在单位圆 $x^2+y^2=1$ 内；

④曲线 C 上所有的点的横坐标 $x\in[-1,1]$.

其中，所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 5 小题，共 40 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．(本小题满分 6 分)

已知点 $A(1,3)$， $B(3,1)$， $C(-1,0)$.求：

（I） BC 边上的中线所在直线的方程；

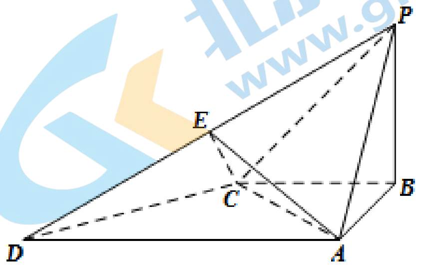
（II）三角形 ABC 的面积.

17．（本小题满分 8 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PB\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\perp BC$ ， $AD\,//\,BC$ ， $AD=2BC$ ，点 E 为棱 PD 的中点.

（I）求证： $CE\,//$ 平面 PAB;

（II）求证： $AD\perp$ 平面 PAB.



18．（本小题满分 8 分）

在平面直角坐标系中，已知点 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(2,0)$，$\triangle OAB$ 的外接圆为圆 M，直线 l 的方程为 $y=kx-2$.

（I）求圆 M 的方程;

（II）若直线 l 与圆 M 相交于 E，F 两点，$|EF|=\sqrt{2}$，求 k 的值.

19．(本小题满分 9 分)

如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\,//\,CD$，$AD\perp DC$，且 $AB=AD=\frac{1}{2}CD=1$.现以 AD 为一边向梯形外作正方形 $ADEF$，然后沿边 AD 将正方形 $ADEF$ 折起，使 $ED\perp DC$，M 为线段 DE 上的动点，如图 2.

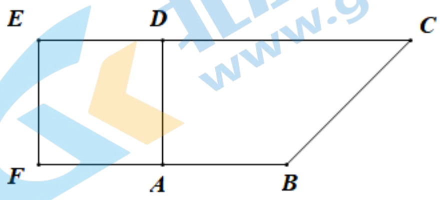


图 1

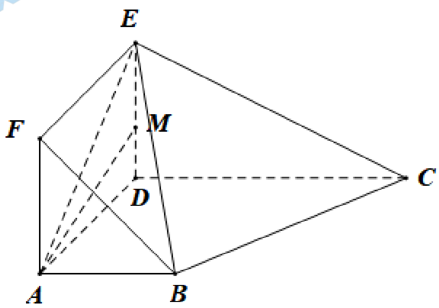


图 2

（I）求二面角 $C-BE-A$ 的大小;

（II）设 $\frac{DM}{DE}=\lambda$，若 AM 所在直线与平面 BCE 相交，求 λ 的取值范围.

20．(本小题满分 9 分)

椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，经过点 $A(0,-1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 E 的方程;

（II）过椭圆右焦点的直线与椭圆 E 交于 P,Q 两点，点 $M(2,0)$，O 为坐标原点，证明：$\angle OMP=\angle OMQ$.

2022 北京石景山高二（上）期末数学

参考答案

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	*D*	*A*	*D*	*C*	*B*	*A*	*D*	*C*	*A*	*C*

二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分.

题号	11	12	13	14	15
答案	$\frac{2}{3}$	0或−1	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	①②④

三、解答题：本大题共 5 个小题，共 40 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16．(本小题满分 6 分)

解:（I）因为 $A(1,3)$， $B(3,1)$， $C(-1,0)$，

所以线段 BC 的中点坐标为 $(1,\frac{1}{2})$，　　　　…………………………1 分

所以 BC 边上的中线所在的直线的斜率不存在，

BC 边上的中线所在的直线方程为 $x=1$.　　　　…………………………3 分

（II）直线 BC 的方程为 $\frac{y-0}{1-0}=\frac{x+1}{3+1}$，即 $x-4y+1=0$，

则点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|1-3\times4+1|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{10\sqrt{17}}{17}$，

又 $|BC|=\sqrt{(3+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}$，

故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\frac{10\sqrt{17}}{17}=5$.　　　　…………………………6 分

17．(本小题满分 8 分)

证明：（I）取 PA 中点 F，连接 EF，BF，因为 E 为 PD 中点，F 为 PA 中点，

所以 $EF // AD$，且 $EF=\frac{1}{2}AD$.

又因为 $BC // AD$，且 $BC=\frac{1}{2}AD$，

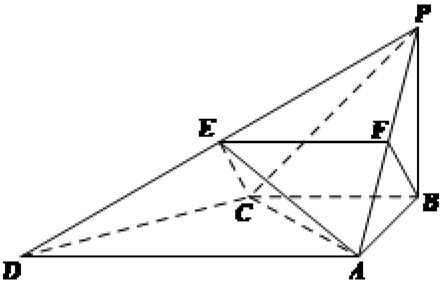
所以 $EF // BC$，且 $EF=BC$.

所以四边形 $BCEF$ 为平行四边形，

所以 $CE // BF$，

因为 $CE \not\subset$ 平面 PAB， $BF \subset$ 平面 PAB

所以 $CE //$ 平面 PAB.　　　　…………………………4 分



（II）因为 $PB \perp$ 平面 $ABCD$， $AD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $PB \perp AD$

又因为 $AB \perp BC$， $AD // BC$

所以 $AD \perp AB$，

又 $AB \cap PB = B$，AB、 $PB \subset$ 平面 PAB

所以 $AD \perp$ 平面 PAB. …………………………8 分

18．(本小题满分 8 分)

解：（I）圆 M 经过点 $O(0,0)$ 、 $A(1,1)$ 、 $B(2,0)$，

所以 $OA \perp AB$，$|OA|=|AB|$， …………………………2 分

所以圆心为 $M(1,0)$，半径为 $r=1$， …………………………3 分

则圆 M 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$； …………………………4 分

（II）设圆心 $M(1,0)$ 到直线 l 的距离为 d，

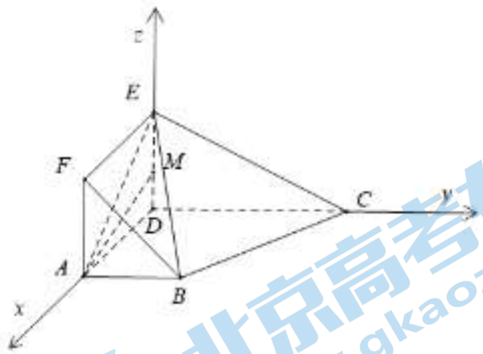
因为直线 l 与圆 M 相交于 E，F 两点，$|EF|=\sqrt{2}$，

所以 $(\frac{|EF|}{2})^2+d^2=r^2$，得 $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+d^2=1$，则 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………………………6 分

所以 $\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $k=1$ 或 $k=7$. …………………………8 分

19．(本小题满分 9 分)

解：因为 $ED \perp DC$，所以，易得 DA, DC, DE 两两垂直，以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$ 方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系，



则 $C(0,2,0)$， $A(1,0,0)$， $B(1,1,0)$， $E(0,0,1)$.

（I）$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{EB}=(1,1,-1)$， $\overrightarrow{CB}=(1,-1,0)$，

设平面 ABE 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

$\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AB}=y_1=0$，

$\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{EB} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{EB}=x_1+y_1-z_1=0$，

令 $x_1=1$，得 $y_1=0, z_1=1$.

所以平面 ABE 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$. …………………………2 分

设平面 CBE 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{EB} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{EB}=x_2+y_2-z_2=0$

$\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{CB}=x_2-y_2=0$

令 $x_2=1$，得 $y_2=1, z_2=2$.

所以平面 CBE 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$. …………………………3 分

$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1+0+2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …………………………5 分

二面角 $C-BE-A$ 为钝角，所以二面角 $C-BE-A$ 的大小为 $\dfrac{5}{6}\pi$. ………………6 分

（II）因为 $\dfrac{DM}{DE}=\lambda$，所以 $M(0,0,\lambda)$ 且 $\lambda\in[0,1]$,

$\overrightarrow{AM}=(-1,0,\lambda)$,

因为 AM 所在直线与平面 BCE 相交，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n_2}=-1+2\lambda\neq0$，解得 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$， ………………8 分

所以 λ 的取值范围为 $[0,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},1]$. ………………9 分

20．(本小题满分 9 分)

解：（I）由题设知，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$， …………………………1 分

结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………3 分

（II）证明：由（I）可得椭圆的右焦点为 $(1,0)$，

当直线 PQ 斜率存在时，设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

可得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，易知 $\Delta>0$，

$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$， …………………………5 分

则 $k_{MP}+k_{MQ}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{k(x_1-1)}{x_1-2}+\dfrac{k(x_2-1)}{x_2-2}$

$=\dfrac{k(x_1-1)(x_2-2)+k(x_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\dfrac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\dfrac{\dfrac{2k(2k^2-2)-12k^3+4k(2k^2+1)}{2k^2+1}}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$，

则 $\angle OMP=\angle OMQ$； …………………………8 分

当直线 PQ 斜率不存在时，PQ 垂直 x 轴，由对称性易知 $\angle OMP=\angle OMQ$，

综上，$\angle OMP=\angle OMQ$. …………………………9 分

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）