保密★启用前

# 湛江市2024年普通高考测试(一)

# 数 学

2024.2

准考证号______

姓名______

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知函数 $f(x)=\left(2^x-\frac{a}{2^x}\right)\cos x$ 是偶函数,则实数 $a=$

A. 1　　B. $-1$　　C. 2　　D. $-2$

2. 已知复数 $z=\frac{7+5i}{1+i}$,则 $\bar{z}=$

A. $6+i$　　B. $6-i$　　C. $1+6i$　　D. $1-6i$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,若向量 $\boldsymbol{c}=\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\theta$,则 $\cos\theta=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

4. 中国是瓷器的故乡,中国瓷器的发明是中华民族对世界文明的伟大贡献.下图是明清时期的一件圆台形青花缠枝纹大花盆,其上口直径为20 cm,下底直径为18 cm,高为24 cm,则其容积约为

A. $1448\pi\ cm^3$　　B. $1668\pi\ cm^3$　　C. $2168\pi\ cm^3$　　D. $3252\pi\ cm^3$

5. 已知 $f_1(x)=xe^x+\sin x+\cos x$,$f_{n+1}(x)$ 是 $f_n(x)$ 的导函数,即 $f_2(x)=f_1'(x)$,$f_3(x)=f_2'(x)$,…,$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 $f_{2024}(0)=$

A. 2021　　B. 2022　　C. 2023　　D. 2024

6. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，则 $\omega$ 的取值范围是

A. $[2,5]$　　B. $[1,14]$　　C. $[9,10]$　　D. $[10,11]$

7. 已知 $ab>0$，$a^2+ab+2b^2=1$，则 $a^2+2b^2$ 的最小值为

A. $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{7-2\sqrt{2}}{8}$

8. 在一次考试中有一道 4 个选项的双选题，其中 B 和 C 是正确选项，A 和 D 是错误选项，甲、乙两名同学都完全不会这道题目，只能在 4 个选项中随机选取两个选项. 设事件 $M$＝“甲、乙两人所选选项恰有一个相同”，事件 $N$＝“甲、乙两人所选选项完全不同”，事件 $X$＝“甲、乙两人所选选项完全相同”，事件 $Y$＝“甲、乙两人均未选择 B 选项”，则

A. 事件 $M$ 与事件 $N$ 相互独立　　B. 事件 $X$ 与事件 $Y$ 相互独立

C. 事件 $M$ 与事件 $Y$ 相互独立　　D. 事件 $N$ 与事件 $Y$ 相互独立

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.**

9. 某养老院有 110 名老人，经过一年的跟踪调查，过去的一年中他们是否患过某流行疾病和性别的相关数据如下表所示：

| 性别 | 是否患过某流行疾病 | | 合计 |
|---|---|---|---|
| | 患过该疾病 | 未患过该疾病 | |
| 男 | $a=20$ | $b$ | $a+b$ |
| 女 | $c$ | $d=50$ | $c+d$ |
| 合计 | $a+c$ | 80 | 110 |

下列说法正确的有

A. $\frac{a}{a+b}>\frac{c}{c+d}$

B. $\chi^2>6.635$

C. 根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，认为是否患过该流行疾病与性别有关联

D. 根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，没有充分的证据推断是否患过该流行疾病与性别有关联

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

附表：

| $\alpha$ | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_\alpha$ | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 10.828 |

10. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过点 $(-1,0)$ 的直线 $l$ 与抛物线 $C$ 交于 $A,B$ 两点，设直线 $l$ 的斜率为 $k$，则下列选项正确的有

A. $0<|k|<1$

B. 若以线段 $AB$ 为直径的圆过点 $F$，则 $|AB|=4\sqrt{3}$

C. 若以线段 $AB$ 为直径的圆与 $y$ 轴相切，则 $|AB|=3$

D. 若以线段 $AB$ 为直径的圆与 $x$ 轴相切，则该圆必与抛物线 $C$ 的准线相切

11. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2BB_1=4$，$BC=3$，$M,N$ 分别为 $BB_1$ 和 $CC_1$ 的中点，$P$ 为棱 $B_1C_1$ 上的一点，且 $PC\perp PM$，则下列选项中正确的有

A. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 存在内切球

B. 直线 $MN$ 被三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球截得的线段长为 $\sqrt{13}$

C. 点 $P$ 在棱 $B_1C_1$ 上的位置唯一确定

D. 四面体 $ACMP$ 的外接球的表面积为 $26\pi$

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12. 已知全集 $U$ 为实数集 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2\leqslant 4\}$，$B=\{x|\log_2 x>2\}$，则 $A\cup \complement_U B=$________.

13. 已知点 $P$ 为直线 $x-y-3=0$ 上的动点，过 $P$ 作圆 $O: x^2+y^2=3$ 的两条切线，切点分别为 $A,B$，若点 $M$ 为圆 $E:(x+2)^2+(y-3)^2=4$ 上的动点，则点 $M$ 到直线 $AB$ 的距离的最大值为________.

14. 已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过点 $P(3c,0)$ 的直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于 $A,B$ 两点，若 $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PA}$，$|F_2B|=3|F_2A|$，则椭圆 $C$ 的离心率为________.

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.（本小题满分 13 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，且 $a\cos(B-C)+a\cos A-2\sqrt{3}c\sin B\cos A=0$.

(1)求 $A$；

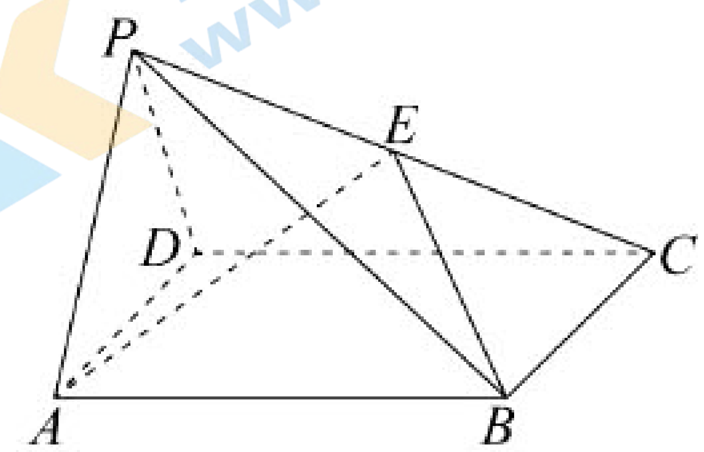
(2)若 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2\sqrt{3}$，求 $2c-b$ 的取值范围.

16.(本小题满分 15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$\triangle PAD$ 是边长为 2 的等边三角形,$PC=PB=2\sqrt{2}$.

(1)证明:平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$;

(2)若点 $E$ 为棱 $PC$ 的中点,求平面 $AEB$ 与平面 $CEB$ 夹角的余弦值.




17.(本小题满分 15 分)

甲进行摸球跳格游戏.图上标有第 1 格,第 2 格,…,第 25 格,棋子开始在第 1 格.盒中有 5 个大小相同的小球,其中 3 个红球,2 个白球(5 个球除颜色外其他都相同).每次甲在盒中随机摸出两球,记下颜色后放回盒中,若两球颜色相同,棋子向前跳 1 格;若两球颜色不同,棋子向前跳 2 格,直到棋子跳到第 24 格或第 25 格时,游戏结束.记棋子跳到第 $n$ 格的概率为 $P_n(n=1,2,3,\cdots,25)$.

(1)甲在一次摸球中摸出红球的个数记为 $X$,求 $X$ 的分布列和期望;

(2)证明:数列$\{P_n-P_{n-1}\}(n=2,3,\cdots,24)$为等比数列.

18.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x)=(1+\ln x)e^{\ln\frac{1}{ax}}$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若方程 $f(x)=1$ 有两个根 $x_1,x_2$,求实数 $a$ 的取值范围,并证明:$x_1x_2>1$.

19.(本小题满分 17 分)

已知 $P(4,3)$为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点,$M,N$ 分别为双曲线 $C$ 的左、右顶点,且直线 $PM$ 与 $PN$ 的斜率之和为 2.

(1)求双曲线 $C$ 的方程;

(2)不过点 $P$ 的直线 $l:y=kx+t$ 与双曲线 $C$ 交于 $A,B$ 两点,若直线 $PA,PB$ 的倾斜角分别为 $\alpha$ 和 $\beta$,且 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$,证明:直线 $l$ 过定点.

# 湛江市 2024 年普通高考测试(一)

# 数学参考答案及评分标准

2024.2

**一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1.【答案】B

【解析】因为 $f(-x)=\left(2^{-x}-\frac{a}{2^{-x}}\right)\cos(-x)=\left(\frac{1}{2^x}-a\cdot 2^x\right)\cos x=f(x)=\left(2^x-\frac{a}{2^x}\right)\cos x$,所以 $a=-1$. 故选 B.

2.【答案】A

【解析】$z=\frac{7+5i}{1+i}=\frac{(7+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{7+5i-7i-5i^2}{2}=\frac{12-2i}{2}=6-i$,故 $\overline{z}=6+i$. 故选 A.

3.【答案】D

【解析】$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$. 故选 D.

4.【答案】C

【解析】由圆台体积公式得 $V=\frac{1}{3}\times(10^2\pi+9^2\pi+\sqrt{10^2\pi\times 9^2\pi})\times 24=2168\pi(\text{cm}^3)$. 故选 C.

5.【答案】B

【解析】$f_2(x)=f_1'(x)=(x+1)e^x+\cos x-\sin x$,$f_3(x)=f_2'(x)=(x+2)e^x-\sin x-\cos x$,$f_4(x)=f_3'(x)=(x+3)e^x-\cos x+\sin x$,$f_5(x)=f_4'(x)=(x+4)e^x+\sin x+\cos x$,…,由此规律得 $f_{2024}(x)=f_{2023}'(x)=(x+2023)e^x-\cos x+\sin x$,所以 $f_{2024}(0)=(0+2023)e^0-\cos 0+\sin 0=2023-1=2022$. 故选 B.

6.【答案】D

【解析】由题意得 $\begin{cases}\frac{\pi}{12}\omega+\frac{2\pi}{3}\geqslant 2k\pi-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{6}\omega+\frac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,解得 $24k-14\leqslant\omega\leqslant 12k-1$,$k\in\mathbf{Z}$.

又 $\omega>0$,只有当 $k=1$ 时,$10\leqslant\omega\leqslant 11$ 成立,所以 $\omega$ 的取值范围为 $[10,11]$. 故选 D.

7.【答案】A

【解析】由题意得 $a^2+2b^2=\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+2b^2}=\frac{\frac{a^2}{b^2}+2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+2}=\frac{1}{1+\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2}+2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}}}$.

又 $ab>0$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}b$ 时，等号成立，

所以 $a^2+2b^2\geqslant\frac{1}{1+\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$. 故选 A.

8.【答案】C

【解析】依题意得甲、乙两人所选选项的情形有①有一个选项相同，②两个选项相同，③两个不相同，

所以 $P(M)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_4^2\times C_4^2}=\frac{2}{3}$，$P(N)=\frac{C_4^2}{C_4^2\times C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X)=\frac{C_4^2}{C_4^2\times C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(Y)=\frac{C_3^2\times C_3^2}{C_4^2\times C_4^2}=\frac{1}{4}$，

因为事件 $M$ 与事件 $N$ 互斥，所以 $P(MN)=0$，又 $P(M)P(N)=\frac{1}{9}$，所以事件 $M$ 与事件 $N$ 不相互独立，故 A 选项错误；

$P(XY)=\frac{C_3^2}{C_4^2\times C_4^2}=\frac{1}{12}\neq P(X)P(Y)=\frac{1}{24}$，故 B 选项错误；

由 $P(MY)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_4^2\times C_4^2}=\frac{1}{6}=P(M)P(Y)$，得事件 $M$ 与事件 $Y$ 相互独立，故 C 选项正确；

因为事件 $N$ 与事件 $Y$ 互斥，所以 $P(NY)=0$，又 $P(N)P(Y)=\frac{1}{24}$，所以事件 $N$ 与事件 $Y$ 不相互独立，故 D 选项错误. 故选 C.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.【答案】ABC

【解析】由表中数据得 $b=30$，$c=10$，$a+b=50$，$c+d=60$，$a+c=30$，$b+d=80$，

所以 $\frac{a}{a+b}=\frac{20}{50}>\frac{10}{60}=\frac{c}{c+d}$，故 A 正确；

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{110\times(20\times 50-10\times 30)^2}{50\times 60\times 30\times 80}\approx 7.486>6.635$，故 B 正确；

依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，认为是否患过该流行疾病与性别有关联，故 C 正确、D 错误. 故选 ABC.

10.【答案】ABC

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $l$ 的方程为 $x=my-1$，$m=\frac{1}{k}$，$AB$ 的中点为 $M(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases}x=my-1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消 $x$ 并化简得 $y^2-4my+4=0$，$\Delta=16m^2-16=16(m^2-1)>0$，故 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=4$，

所以 $m^2>1$，即 $\frac{1}{k^2}>1$，所以 $0<|k|<1$，所以 A 正确；

若以线段 $AB$ 为直径的圆过点 $F$，则 $FA\perp FB$，则 $(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$，

又 $x_1=my_1-1$，$x_2=my_2-1$，

故 $(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=(my_1-2)(my_2-2)+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4=0$，

所以 $4(m^2+1)-8m^2+4=8-4m^2=0$，故 $m^2=2$，

$|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=4\sqrt{m^4-1}=4\sqrt{3}$，所以 B 正确；

若以线段 $AB$ 为直径的圆与 $y$ 轴相切，则 $2x_0=|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$，

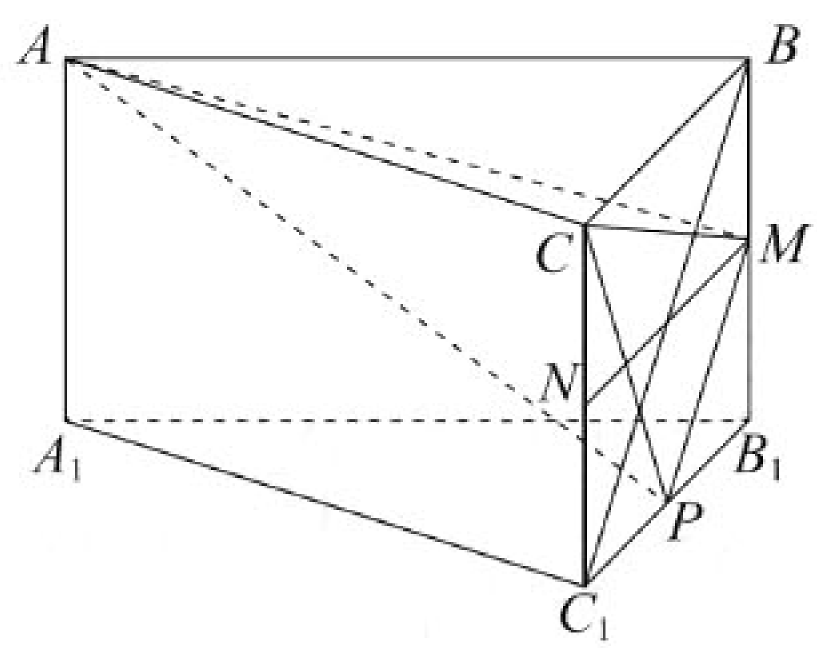
又 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=2x_0$，所以 $4m^2-2=\sqrt{(1+m^2)[(4m)^2-16]}$，解得 $m^2=\frac{5}{4}>1$，

所以 $|AB|=4m^2-2=3$，所以 C 正确；

若以线段 $AB$ 为直径的圆与 $C$ 的准线相切，则 $x_0+1=\frac{|AB|}{2}$，即 $2x_0+2=|AB|$，又 $2x_0+2=m(y_1+y_2)=4m^2$，所以 $4m^2=4\sqrt{m^4-1}$，无解，所以 D 错误. 故选 ABC.

11.【答案】ABD

【解析】由题意得直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 如图所示：




又 $AB\perp BC$，$AB=2BB_1=4$，$BC=3$，所以 $AC=5$，故 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $r=1$.

又 $BB_1=2=2r$，所以直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 存在半径为 $r=1$ 的内切球，故 A 正确.

由 $BB_1=2$，$B_1C_1=3$，$BB_1\perp B_1C_1$，所以 $BC_1=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

因为 $M$，$N$ 分别为 $BB_1$ 和 $CC_1$ 的中点，所以直线 $MN$ 过矩形 $BCC_1B_1$ 外接圆的圆心.

又矩形 $BCC_1B_1$ 的四个顶点都在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球球面上，

所以直线 $MN$ 被三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球截得的线段长为矩形 $BCC_1B_1$ 外接圆的直径，即 $BC_1$ 的长 $\sqrt{13}$，故 B 正确.

设 $PB_1=t(0<t<3)$，则 $PC_1=3-t$，因为 $PC\perp PM$，所以 $\angle CPC_1+\angle MPB_1=90°$，又 $BB_1\perp B_1C_1$，$CC_1\perp B_1C_1$，所以 $\triangle CC_1P\backsim\triangle PB_1M$，所以 $\frac{CC_1}{PB_1}=\frac{PC_1}{MB_1}$，即 $\frac{2}{t}=\frac{3-t}{1}$，解得 $t=1$ 或 $t=2$，所以点 $P$ 在棱 $B_1C_1$ 的两个三等分点处均可，所以 C 错误.

因为 $PC\perp PM$，$CB\perp BM$，所以 $P$，$C$，$B$，$M$ 四点共圆，且圆心为 $CM$ 的中点 $O$，其半径 $R_0=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

又 $AB\perp$ 平面 $CBB_1C_1$，所以四面体 $ACMP$ 的外接球半径 $R=\sqrt{R_0^2+(\frac{AB}{2})^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$，

此时四面体 $ACMP$ 的外接球表面积为 $S=4\pi R^2=26\pi$，故 D 正确. 故选 ABD.

## 三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.【答案】$(-\infty,4]$

【解析】由题可知，$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x>4\}$，所以 $\complement_U B=(-\infty,4]$，所以 $A\cup\complement_U B=(-\infty,4]$.

13.【答案】7

【解析】设 $P(x_0,y_0)$，则直线 $AB$ 的方程为 $x_0x+y_0y=3$，又 $x_0-y_0-3=0$，所以直线 $AB$ 的方程可变为 $x_0x+(x_0-3)y=3$，即 $x_0(x+y)-3y-3=0$，所以直线 $AB$ 过定点 $Q(1,-1)$，所以 $|QE|=\sqrt{(-2-1)^2+(3+1)^2}=5$.

又 $Q$ 在圆 $O:x^2+y^2=3$ 内，当 $AB\perp QE$，且点 $M$ 为 $QE$ 的延长线与圆 $E$ 的交点时，点 $M$ 到直线 $AB$ 的距离最大，最大值为 $|QE|+2=7$.

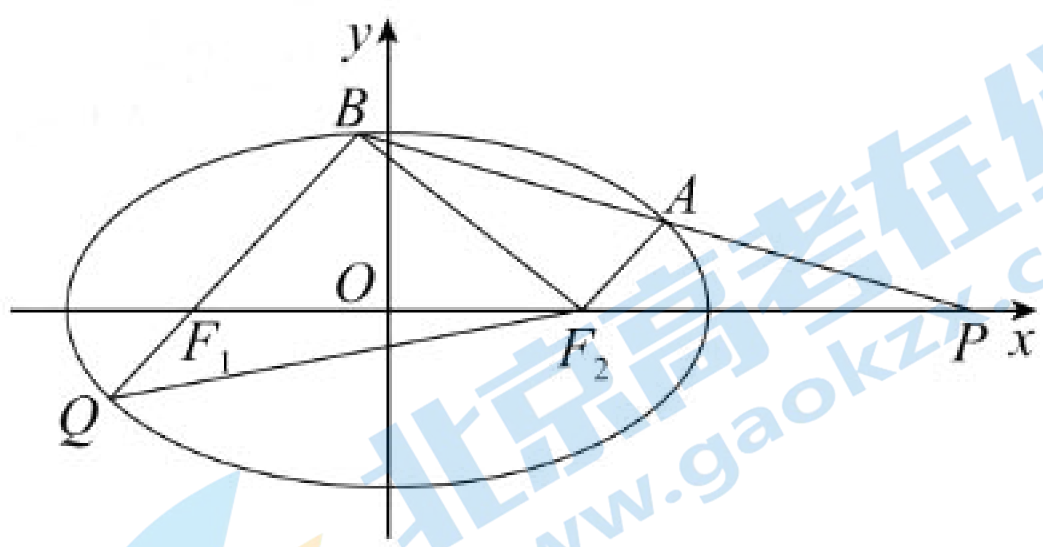
14.【答案】$\dfrac{\sqrt{105}}{15}$

【解析】由 $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PA}$，得 $A$ 为线段 $PB$ 的中点，且点 $P$ 在椭圆外，所以 $3c>a$，即 $e>\dfrac{1}{3}$.

又 $P(3c,0)$，所以 $F_2$ 为线段 $PF_1$ 的中点，所以 $AF_2/\!/BF_1$.

设 $|F_2A|=m$，则 $|BF_1|=2m$，又 $|F_2B|=3|F_2A|$，所以 $|F_2B|=3m$.

由椭圆的定义可知，$2a=|BF_1|+|BF_2|=2m+3m=5m$，即 $m=\dfrac{2}{5}a$，




如图，延长 $BF_1$ 交椭圆 $C$ 于点 $Q$，连接 $QF_2$，则由椭圆的对称性可知，$|QF_1|=|F_2A|=m$，又 $|QF_1|+|QF_2|=2a$，故 $|QF_2|=4m$.

由余弦定理得 $\cos\angle QBF_2=\dfrac{|QB|^2+|BF_2|^2-|QF_2|^2}{2|QB|\cdot|BF_2|}=\dfrac{(3m)^2+(3m)^2-(4m)^2}{2\cdot 3m\cdot 3m}=\dfrac{1}{9}$.

在 $\triangle BF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，由余弦定理得 $4c^2=4m^2+9m^2-2\times 2m\times 3m\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{35}{3}m^2$，

即 $c^2=\dfrac{35}{12}m^2=\dfrac{35}{12}\times\dfrac{4}{25}a^2=\dfrac{7}{15}a^2$，所以椭圆 $C$ 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{7}{15}}=\dfrac{\sqrt{105}}{15}>\dfrac{1}{3}$，故答案为 $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$.

## 四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：(1) 由 $A+B+C=\pi$，得 $A=\pi-(B+C)$，$\cos A=-\cos(B+C)$， ………………………… 1 分

故得 $a\cos(B-C)-a\cos(B+C)=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$，

所以 $a\cos B\cos C+a\sin B\sin C-a(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$， ……… 3 分

即 $a\sin B\sin C=\sqrt{3}c\sin B\cos A$.

由正弦定理,得 $\sin A\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\sin B\cos A$, …………………………………… 5 分

显然 $\sin C>0$,$\sin B>0$,所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$, …………………………………… 6 分

所以 $\tan A=\sqrt{3}$.

因为 $A\in(0,\pi)$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………………… 7 分

(2)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=2R=2\sqrt{3}$,得 $b=2\sqrt{3}\sin B$,$c=2\sqrt{3}\sin C$, ………… 8 分

故 $2c-b=4\sqrt{3}\sin C-2\sqrt{3}\sin B=2\sqrt{3}(2\sin C-\sin B)$. …………………………………… 9 分

又 $A+B+C=\pi$,所以 $B=\frac{2\pi}{3}-C$,$C\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$, …………………………………… 10 分

所以 $2c-b=2\sqrt{3}\left[2\sin C-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)\right]=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)=6\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$. … 11 分

又 $C\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $C-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, …………………………………… 12 分

所以 $2c-b=6\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)\in(-3,6)$,所以 $2c-b$ 的取值范围为 $(-3,6)$. ……………… 13 分

16.(1)证明:由题意得 $AB=BC=CD=DA=AP=PD=2$,又 $PB=PC=2\sqrt{2}$,

所以 $PD^2+CD^2=PC^2$,$AP^2+AB^2=PB^2$, …………………………………………… 2 分

所以 $DC\perp PD$,$AB\perp AP$. ……………………………………………………………… 3 分

因为底面 $ABCD$ 为菱形,故 $AB/\!/DC$,

故 $DC\perp AP$,又 $AP\subset$ 平面 $PAD$,$DP\subset$ 平面 $PAD$,且 $AP\cap DP=P$,所以 $DC\perp$ 平面 $PAD$.

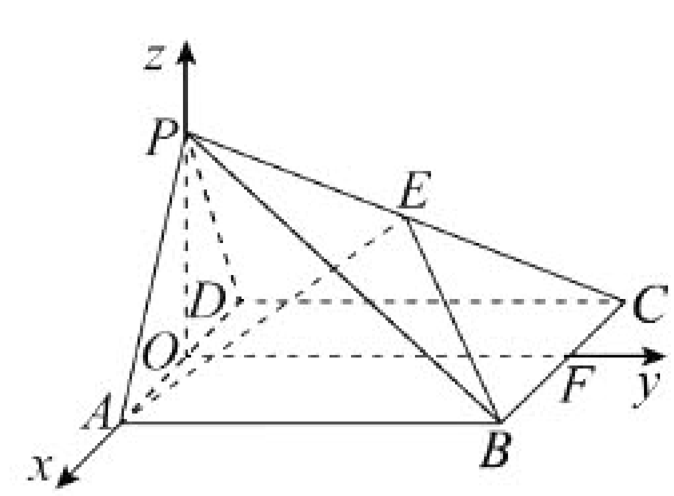
……………………………………………………………………………………………… 5 分

又 $DC\subset$ 平面 $ABCD$,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………… 6 分

(2)解:由(1)知 $DC\perp$ 平面 $PAD$,所以 $DC\perp DA$,故底面 $ABCD$ 为正方形. ……………… 7 分

设 $AD$ 的中点为 $O$,连接 $OP$,在平面 $ABCD$ 内作 $OF/\!/DC$. 因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形,所以 $PO\perp AD$,故 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

如图,以 $O$ 为坐标原点,$OA$,$OF$,$OP$ 所在直线分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴,建立空间直角坐标系,




则 $P(0,0,\sqrt{3})$,$A(1,0,0)$,$B(1,2,0)$,$C(-1,2,0)$,

所以 $E\left(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ……………………………………………… 8 分

故 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………………………………… 9 分

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 $AEB$ 的法向量,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y_1=0,\\ -\dfrac{3}{2}x_1-y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,3)$. …………………………………………………… 11 分

设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 $BCE$ 的法向量,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x_2=0,\\ -\dfrac{3}{2}x_2-y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},2)$, …………………………………………………… 13 分

则 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, …………………………………………………… 14 分

所以平面 $AEB$ 与平面 $CEB$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. …………………………………………… 15 分

17.(1)解:$X$ 的所有可能取值为 0,1,2. …………………………………………………………… 1 分

$P(X=0)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$, ………………………………………………………………………… 2 分

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$, ……………………………………………………………………… 3 分

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$, ………………………………………………………………………… 4 分

所以 $X$ 的分布列为

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}=1.2$. …………………………………………… 7 分

(2)证明:由(1)知两球颜色相同的概率为 $\dfrac{2}{5}$,颜色不同的概率为 $\dfrac{3}{5}$. …………………… 8 分

棋子在第 1 格为必然事件,则 $P_1=1$,

棋子跳到第 2 格的概率为 $P_2=\dfrac{2}{5}$,所以 $P_2-P_1=\dfrac{2}{5}-1=-\dfrac{3}{5}$. …………………………… 9 分

当 $3\leqslant n\leqslant 24$ 时,$P_n=\dfrac{2}{5}P_{n-1}+\dfrac{3}{5}P_{n-2}$, …………………………………………………… 12 分

所以 $5(P_n-P_{n-1})=-3(P_{n-1}-P_{n-2})$,所以 $\dfrac{P_n-P_{n-1}}{P_{n-1}-P_{n-2}}=-\dfrac{3}{5}$, …………………………… 14 分

所以数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是以$-\frac{3}{5}$为首项，$-\frac{3}{5}$为公比的等比数列. …………………………… 15分

18. 解：(1)由题意得$x>0$，$\frac{1}{ax}>0$，所以$a>0$，…………………………………………………… 1分

$f(x)=(1+\ln x)e^{\ln\frac{1}{ax}}=\frac{1+\ln x}{ax}$的定义域为$(0,+\infty)$. ………………………………… 2分

又$f'(x)=-\frac{\ln x}{ax^2}$，由$f'(x)=0$，得$x=1$. …………………………………………………… 3分

当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$单调递增，当$x>1$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减，

所以$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减. ……………………………… 6分

(2)由$\frac{1+\ln x}{ax}=1$，得$\frac{1+\ln x}{x}=a$，设$g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，

由(1)得$g(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减. ……………………… 7分

又$g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，$g(1)=1$，且$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$，

所以当$0<a<1$时，方程$\frac{1+\ln x}{x}=a$有两个根. ………………………………………………… 9分

证明：由上，不妨设$x_1<x_2$，则$0<x_1<1<x_2$，$\frac{\ln x_1+1}{x_1}=\frac{\ln x_2+1}{x_2}$.

设$h(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\ln x}{x}-x(1-\ln x)$，…………………………………………… 11分

$h'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}+\ln x=\frac{x^2-1}{x^2}\ln x\geqslant 0$，所以函数$h(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增. ……… 13分

又$h(1)=0$，所以$h(x_1)=g(x_1)-g\left(\frac{1}{x_1}\right)<0$， ……………………………………………… 14分

即$g(x_1)<g\left(\frac{1}{x_1}\right)$. 又$g(x_2)=g(x_1)$，所以$g(x_2)<g\left(\frac{1}{x_1}\right)$. ……………………… 16分

又$x_2>1$，$\frac{1}{x_1}>1$，$g(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减，所以$x_2>\frac{1}{x_1}$，故$x_1x_2>1$. ………… 17分

19. (1)解：由题意得$\frac{4^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1$，又$k_{PM}+k_{PN}=\frac{3}{4+a}+\frac{3}{4-a}=2$，$a>0$，故得$a=2$， ………… 2分

所以$b^2=3$，…………………………………………………………………………………… 4分

所以双曲线$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………… 6分

(2)证明：当直线$PA$，$PB$的斜率均存在时，

设直线$PA$，$PB$的斜率分别为$k_{PA}$，$k_{PB}$，则$\tan\alpha=k_{PA}$，$\tan\beta=k_{PB}$.

又$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k_{PA}+k_{PB}}{1-k_{PA}\cdot k_{PB}}=-1$，

故$k_{PA}+k_{PB}-k_{PA}\cdot k_{PB}+1=0$. …………………………………………………………… 7分

设 $A,B$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+t, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(3-4k^2)x^2-8ktx-4t^2-12=0$，

$\Delta=(8kt)^2-4(3-4k^2)(-4t^2-12)>0 \Rightarrow t^2+3-4k^2>0$，

则有 $x_1+x_2=\dfrac{8kt}{3-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4t^2-12}{3-4k^2}$. ………………………………………………………… 9 分

又 $y_1=kx_1+t$，$y_2=kx_2+t$，

所以 $k_{PA}=\dfrac{y_1-3}{x_1-4}=\dfrac{kx_1+t-3}{x_1-4}$，$k_{PB}=\dfrac{y_2-3}{x_2-4}=\dfrac{kx_2+t-3}{x_2-4}$，

所以 $k_{PA}+k_{PB}-k_{PA}\cdot k_{PB}+1=\dfrac{kx_1+t-3}{x_1-4}+\dfrac{kx_2+t-3}{x_2-4}-\dfrac{kx_1+t-3}{x_1-4}\times\dfrac{kx_2+t-3}{x_2-4}+1=0$，

………………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $(kx_1+t-3)(x_2-4)+(kx_2+t-3)(x_1-4)-(kx_1+t-3)(kx_2+t-3)+(x_1-4)(x_2-4)=0$，

整理得 $(-k^2+2k+1)x_1x_2+(t-k-tk-7)(x_1+x_2)+31-t^2-2t=0$，

所以 $(-k^2+2k+1)\times\dfrac{-4t^2-12}{3-4k^2}+(t-k-tk-7)\times\dfrac{8kt}{3-4k^2}+31-t^2-2t=0$，

得 $(k^2-2k-1)\times(4t^2+12)+(t-k-tk-7)\times 8kt+(31-t^2-2t)(3-4k^2)=0$，

化简得 $7t^2+112k^2+56tk+24k+6t-81=0$，……………………………………………… 13 分

所以 $7t^2+112k^2+56tk+24k+6t-81=(7t+28k+27)(t+4k-3)=0$. ………………… 14 分

当 $t=-4k+3$ 时，直线 $l$ 过点 $P$，故舍去，故当 $7t=-28k-27$，且满足 $\Delta>0$ 恒成立时，

直线 $l$ 的方程为 $y=kx-4k-\dfrac{27}{7}=k(x-4)-\dfrac{27}{7}$，所以直线 $l$ 过定点 $\left(4,-\dfrac{27}{7}\right)$. ……… 15 分

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，这时直线 $PA$ 的斜率不存在，点 $P$ 与点 $A$ 关于 $x$ 轴对称，所以 $A(4,-3)$.

易知直线 $PB$ 的方程为 $y=x-1$.

由 $\begin{cases} y=x-1, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $-x^2+8x-16=0$，即 $-(x-4)^2=0$，所以点 $B$ 与点 $P$ 重合，与直线 $l$ 不过点 $P$ 矛盾；

同理，当 $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，点 $A$ 与点 $P$ 重合，与直线 $l$ 不过点 $P$ 矛盾.

综上，直线 $l$ 过定点 $\left(4,-\dfrac{27}{7}\right)$. ……………………………………………………… 17 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜
京考一点通