# 中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 7 月测试

# 数学试卷

**本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。**

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知 i 是虚数单位，复数 $zi=1-2i$，则 $z$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

A．$-i$　　B．1　　C．i　　D．$-1$

2．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|\log_2 x<2\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{R}|\sqrt{x-1}<\sqrt{2}\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty,3)$　　B．$(-1,3)$　　C．$(0,3)$　　D．$[1,3)$

3．武汉封城期间，某医院抽调 5 名医生，分赴三所“方舱医院”支援抗疫，要求每名医生只去一所“方舱医院”，每所“方舱医院”至少安排一名医生，由于工作需要，医生甲和乙必须安排在同一所“方舱医院”，则所有不同的安排方案有

A．18 种　　B．24 种　　C．36 种　　D．48 种

4．设 $a=\ln 0.2$，$b=\sin 3$，$c=e^{0.1}$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为

A．$c>b>a$　　B．$b>c>a$　　C．$a>b>c$　　D．$c>a>b$

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x+1, x>0,\\ xe^x, x<0,\end{cases}$（$e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数），若 $f(x)$ 的零点为 $\alpha$，极小值为 $\beta$，则 $\alpha+\beta=$

A．$-1$　　B．1　　C．0　　D．2

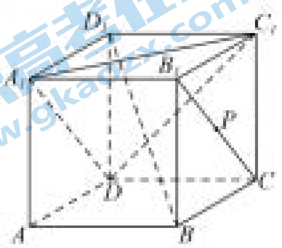
6．已知四棱锥 $V-ABCD$ 的所有棱都相等，点 $M$，$N$ 分别为 $VB$，$VD$ 中点，则异面直线 $MN$ 与 $VA$ 所成角的大小为

A．$30°$　　B．$45°$　　C．$60°$　　D．$90°$

7．设抛物线 $E: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，已知 $B\left(-\frac{p}{2},3p\right)$，$C\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$ 且 $y_0>0$，抛物线 $E$ 上一点 $A$ 满足 $AB\perp BC$，若线段 $AC$ 的垂直平分线 $l$ 过点 $F$，则直线 $l$ 的斜率为

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

8. 如图，在棱长为$a$的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$P$在侧面$BB_1C_1C$（包含边界）内运动，则下列结论正确的有



（第8题图）

①直线$BD_1\perp$平面$A_1C_1D$

②二面角$B_1-CD-B$的大小为$\frac{\pi}{2}$

③过三点$P$、$A_1$、$D$的正方体的截面面积的最大值为$\sqrt{2}a^2$

④三棱锥$B_1-A_1C_1D$的外接球半径为$\sqrt{3}a$

A. ①③　　　B. ①②　　　C. ①③④　　　D. ①②③④

**二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分．**

9. 下列命题中不正确的是

A. 随机变量$X\sim N\left(3,2^2\right)$，若$X=2\eta+3$，则$D(\eta)=1$

B. 已知随机变量$\xi$服从正态分布$N\left(2,\delta^2\right)$，$P(\xi<4)=0.84$，则$P(2<\xi<4)=0.16$

C. 设$(2x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，$x\in\mathbf{R}$，则$a_0=-1$

D. 以模型$y=ce^{kx}$去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设$z=\ln y$，将其变换后得到线性方程$z=0.3x+4$，则$c$，$k$的值分别是$e^4$和$0.3$

10. 已知函数$f(x)=1-2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，则

A. $f(x)$在区间$(0,\pi)$上只有一个零点　　　B. $f(x)$最小正周期为$\pi$

C. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$为$f(x)$的一个对称中心　　　D. $f(x)$的值域为$[-2,2]$

11. 已知$\alpha$，$\beta$是两个不同的平面，$m$，$n$是两条不同的直线，且$m$、$n\not\subset\alpha$，$m$、$n\not\subset\beta$，给出下列四个论断：①$\alpha\,/\!/\,\beta$；②$m\,/\!/\,n$；③$m\,/\!/\,\alpha$；④$n\,/\!/\,\beta$．以其中三个论断为条件，剩余论断为结论组成四个命题．其中正确的命题是

A. ①②③$\Rightarrow$④　　　B. ①③④$\Rightarrow$②　　　C. ①②④$\Rightarrow$③　　　D. ②③④$\Rightarrow$①

12. 画法几何创始人——法国数学家加斯帕尔•蒙日发现：与椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相切的两条垂直切线的交点轨迹为$E:x^2+y^2=a^2+b^2$，这个轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆．下列结论正确的是

A．已知椭圆 $C$ 的长轴长为 4，离心率为 $e=\frac{1}{2}$，则椭圆 $C$ 的"蒙日圆" $E$ 的方程为：$x^2+y^2=7$

B．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A$、$B$ 为椭圆 $C$ 上的两个动点，直线 $l:bx+ay-a^2-b^2=0$ 上任一点 $P$，有 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$

C．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，现将质点 $P$ 随机投入椭圆 $C$ 所对应的蒙日圆内，则质点落在椭圆外部的概率为 $1-\frac{\sqrt{2}}{3}$（椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积公式为 $S=ab\pi$）

D．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$F$ 为椭圆的右焦点，$A$ 为椭圆上的一个动点，直线 $l:bx+ay-a^2-b^2=0$，记点 $A$ 到直线 $l$ 距离为 $d$，则 $d-|AF|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b-2a$

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13．已知向量 $\vec{a}+\vec{b}=(1,1)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-3,1)$，$\vec{c}=(1,1)$，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角 $\theta=$________.

14．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为偶函数，$f(0)=1$，则 $f(2)=$________.

15．记 $\langle x\rangle$ 表示与实数 $x$ 最接近的整数，数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=\frac{1}{\langle\sqrt{n}\rangle}(n\in\mathbf{N}^*)$，其前 $n$ 项和为 $S_n$，则 $S_{33}=$________.

16．已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$，则 $f(x)$ 的最小值是________.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17．（10 分）在① $\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2B$，② $2c-a=2b\cos A$，③ $\vec{m}=(a+b,c-a)$，$\vec{n}=(a-b,c)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$，这三个条件中任选一个补充在下面的问题中，并给出解答．在△$ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，且__________．（注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分．）

（1）求角 $B$；

（2）若 $D$ 是 $BC$ 边的中点，且 $a=2$，$AD=\sqrt{7}$，求△$ABC$ 的面积.

18．（12 分）十九大以来，国家深入推进精准脱贫，加大资金投入，强化社会帮扶，为了更好的服务于人民，派调查组到某农村去考察和指导工作．某学校为了研究学生对时事了解的情况，在网上随机抽取 120 名学生对精准脱贫政策的了解情况进行调查，其中男生与女生的人数之比为 11∶13，其中男生 30 人对于精准脱贫政策了解，女生中有 25 人表示对精准脱贫政策不了解．

（1）完成 $2\times 2$ 列联表，并回答能否有90%的把握认为对“精准脱贫政策了解与性别有关”；

| | 了解 | 不了解 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男生 | | | |
| 女生 | | | |
| 合计 | | | 120 |

（2）从对精准脱贫政策了解的学生中，利用分层抽样抽取7名学生，再在7名学生中抽取3名学生，作精准脱贫政策了解的政策讲解，其中抽取女生的个数为 $\xi$，求 $\xi$ 的分布列及期望值.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

| $P(K^2\geq k)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

19．（12分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_1=1$，$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

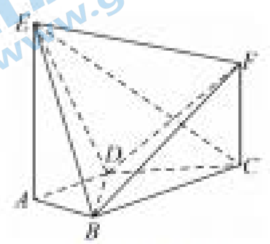
（1）求证：数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列；

（2）数列 $\left\{\dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$T_n<1$.

20．（12分）如图，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\parallel AE$，$AD\parallel BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$.

（1）求证：$BF\parallel$ 平面 $ADE$；

（2）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$，求三棱锥 $C-BDF$ 的体积.



（第20题图）

21．（12分）已知函数 $f(x)=e^{x-1}-a\ln x+a\ln a$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a>0$ 时，证明：$f(x)\geq a$.

22．（12分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点 $A(2,1)$，$B(2,-1)$，$C(1,1)$，$D(0,\sqrt{3})$ 中恰有三点在椭圆 $C$ 上.

（1）求 $C$ 的方程；

（2）点 $M$、$N$ 在 $C$ 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，$D$ 为垂足，求 $D$ 点的轨迹方程.

# 中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 7 月测试

## 数学 参考答案

一、单项选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | D | C | A | C | D | B | A |

二、多项选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 **5** 分，选对但不全的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分．

| 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|
| BC | BD | AC | ACD |

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13．$\frac{\pi}{2}$（或 $90^\circ$）

14．1

15．10.5

16．0

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

解析：

（1）①由 $\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2B$，得 $-\cos B=2\cos^2 B-1$，

即 $\cos B=\frac{1}{2}$，或 $\cos B=-1$，又 $\because B\in(0,\pi)$，

因此 $B=\frac{\pi}{3}$……………………………………………………5 分

②根据余弦定理，由 $2c-a=2b\cos A$，得 $2c-a=2b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

即 $b^2=a^2+c^2-ac$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

又 $\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$……………………………………………5 分

③根据 $\vec{m}\perp\vec{n}$，得 $b^2=a^2+c^2-ac$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

又 $\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$……………………………………………5 分

(2) 在△$ABD$中，由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B$，

又∵ $AD=\sqrt{7}$，$BD=1$，∴ $AB^2-AB-6=0$，解得 $AB=3$，

所以△$ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………………………10 分

18.（12 分）

解析：

（1）男生人数为：$120\times\frac{11}{11+13}=55$，所以女生人数为 $120-55=65$，

于是可完成 $2\times2$ 列联表，如下：

| | 了解 | 不了解 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男生 | 30 | 25 | 55 |
| 女生 | 40 | 25 | 65 |
| 合计 | 70 | 50 | 120 |

……………………………………………3 分

根据列联表中的数据，得到 $k^2$ 的观测值：

$$k^2=\frac{120\times(30\times25-25\times40)^2}{55\times65\times50\times70}=\frac{600}{1001}\approx0.599<2.706,$$

所以没有 90% 的把握认为“精准脱贫政策了解与性别有关” ………………………6 分

（2）根据分层抽样比例关系可知男生抽 $7\times\frac{30}{70}=3$ 人，女生抽 4 人……………………7 分

依题可知 $\xi$ 的可能取值为 0，1，2，3，并且 $\xi$ 服从超几何分布，

$$P(\xi=k)=\frac{C_4^kC_3^{3-k}}{C_7^3}(k=0,1,2,3),$$

即 $P(\xi=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(\xi=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$ ………………………………………10 分

可得分布列为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ |

可得 $E(\xi)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$ …………………………………12 分

19.（12 分）

解析：

（1）$\because S_{n+1}=S_n+2a_n+1$，

$\therefore S_{n+1}-S_n=2a_n+1$，

$\therefore a_{n+1}=2a_n+1$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

又$\because a_1=1$，$\therefore a_1+1=2$，

$\therefore \{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列……………………………………………………6 分

（2）由（1）知$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，

$\therefore a_n=2^n-1$，

$\therefore \dfrac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)\cdot\left(2^{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

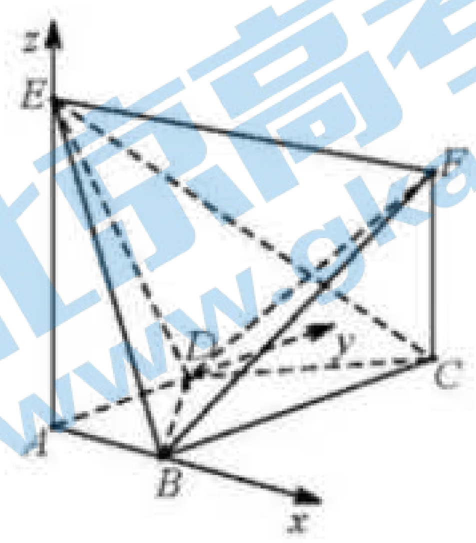
$\therefore T_n=\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}<1$，

$\therefore T_n<1$成立…………………………………………………………………………………12 分

20.（12 分）

解析：




由题意，可以建立以$A$为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$的方向为$x$轴，

$y$轴，$z$轴正方向的空间直角坐标系（如图），

可得$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$，

设$CF=h(h>0)$，

则$F(1,2,h)$……………………………………………………………………3 分

（1）证明：依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面$ADE$的法向量，

又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

又因为直线$BF\not\subset$平面$ADE$，$\therefore BF\,//$平面$ADE$……………………………………………6 分

（2）依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面$BDF$的法向量，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0\\ 2y+hz=0\end{cases}$

不妨令 $y=1$，可得 $\vec{m}=\left(1,1,-\frac{2}{h}\right)$，$\overrightarrow{EB}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{ED}=(0,1,-2)$

设 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 $EBD$ 的法向量，

则由$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n_1}=0\\ \overrightarrow{ED}\cdot\vec{n_1}=0\end{cases}$，得：$\begin{cases}x_1-2z_1=0\\ y_1-2z_1=0\end{cases}$，取 $\vec{n_1}=(2,2,1)$，

由题意，有 $\cos\left(\vec{m},\vec{n_1}\right)=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n_1}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n_1}\right|}=\dfrac{\left|4-\frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\frac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $h=\dfrac{8}{7}$，

所以线段 $CF$ 的长为 $\dfrac{8}{7}$……10 分

$\therefore V_{C-BDF}=V_{F-BDC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BDC}\cdot CF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\dfrac{8}{7}=\dfrac{8}{21}$……12 分

21．（12 分）

解析：

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x$，定义域为 $\{x|x>0\}$，

$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$……2 分

令 $h(x)=f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，

$\therefore h'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(1)=e^0-1=0$……4 分

$\therefore x\in(0,1)$，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

$x\in(1,+\infty)$，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

$\therefore f(x)$ 增区间为 $(1,+\infty)$，减区间为 $(0,1)$．

（2）当 $a>0$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{xe^{x-1}-a}{x}$，

令 $g(x)=xe^{x-1}$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x-1}>0$，

$\therefore g(x)=xe^{x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 单增，且 $g(x)\in(0,+\infty)$．

因此，存在唯一的 $x_0>0$ 满足 $x_0e^{x_0-1}=a$，

且当 $0<x<x_0$ 时，$xe^{x-1}-a<0$，即 $f'(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时，$xe^{x-1}-a>0$，即 $f'(x)>0$．

因此 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值，也是最小值……………………………………9 分

下证：$f(x_0)\ge a$，即证 $e^{x_0-1}-a\ln x_0\ge a-a\ln a$，

$\because x_0e^{x_0-1}=a$，$\therefore e^{x_0-1}=\dfrac{a}{x_0}$，$x_0-1=\ln a-\ln x_0$，

于是 $e^{x_0-1}-a\ln x_0=\dfrac{a}{x_0}-a(\ln a-x_0+1)=\dfrac{a}{x_0}+ax_0-a-a\ln a$

$\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{x_0}\cdot ax_0}-a-a\ln a=a-a\ln a$，不等式 $f(x)\ge a$ 得证……………………………………12 分

22．（12 分）

解析：

（1）根据椭圆对称性，必过点 $A$，$B$，

又 $C$ 纵坐标为 $1$，椭圆必不过 $C$，所以过 $A$，$B$，$D$ 三点，

将 $D(0,\sqrt{3})$，$A(2,1)$ 代入椭圆方程得 $\begin{cases}\dfrac{3}{b^2}=1,\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}$

解得：$a^2=6$，$b^2=3$……………………………………………………………………………3 分

所以 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$…………………………………………………………………4 分

（2）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

若直线 $MN$ 与 $x$ 轴不垂直，设直线 $MN$ 的方程为 $y=kx+m$，

代入 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

由 $\Delta>0$ 得 $6k^2-m^2+3>0$，

于是 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}$ ①……………………………………………6 分

由 $AM\perp AN$ 知 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，故 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

可得 $(1+k^2)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$，

将①代入上式可得：$(1+k^2)\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}-(km-k-2)\dfrac{4km}{1+2k^2}+(m-1)^2+4=0$，

整理得$(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$，

若$2k+m-1=0$则$MN$的方程为$y=kx+1-2k$，此时直线过点$(2,1)$与点$A$重合，舍去.

$\therefore 2k+m-1\neq 0$，故$2k+3m+1=0$，此时$\Delta>0$，

于是$MN$的方程为$y=k\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}$，

所以直线$MN$过点$P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$……………………………………………………………8 分

若直线$MN$与$x$轴垂直，可得$N(x_1,-y_1)$，

由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$得$(x_1-2)(x_1-2)-(y_1-1)(y_1+1)=0$，

又$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，可得$3x_1^2-8x_1+4=0$，

解得$x_1=2$（舍去），$x_1=\frac{2}{3}$，此时直线$MN$过点$P\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$……………………………10 分

令$Q$为$AP$的中点，即$Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，

若$D$与$P$不重合,则由题设知$AP$是$\mathrm{Rt}\Delta ADP$的斜边，故$|DQ|=\frac{1}{2}|AP|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

若$D$与$P$重合,则$|DQ|=\frac{1}{2}|AP|$

综上,存在点$Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，使得$|DQ|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故$D$点轨迹是以$Q$为圆心，$\frac{2\sqrt{2}}{3}$为半径的圆，

轨迹方程为：$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$……………………………………………………12 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。