

北京四中高三数学试卷

(试卷满分 150 分, 考试时间为 120 分钟)

一、选择题:本大题共 10 小题, 每小 4 分, 共 40 分

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cup B =$ 【 】

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 2\}$
C. $\{2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 函数 $f(x) = \frac{2}{x} - x$ 的图像关于 【 】

- A. y 轴对称 B. 直线 $y = -x$ 对称
C. 坐标原点对称 D. 直线 $y = x$ 对称

3. 如果 $a > b > 0$, 那么下列不等式一定成立的是 【 】

- A. $\log_2 a < \log_2 b$ B. $(\frac{1}{2})^a > (\frac{1}{2})^b$
C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $a^2 < b^2$

4. 下列函数中, 既是偶函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 【 】

- A. $y = x^3$ B. $y = \ln \frac{1}{|x|}$
C. $y = 2^{|x|}$ D. $y = \cos x$

5. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.2}$, 则 【 】

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

6. 已知角 θ 的终边经过点 $P(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 则角 θ 可以为 【 】

- A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{2\pi}{3}$
C. $\frac{11\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{3}$

7. 若 $a, b \in R$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 【 】

- A. $a^2 + b^2 > 2ab$ B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$ D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

三、解答题:本大题共 6 小题,共 85 分

16. (本小题满分 13 分)

已知集合 $A = \{x \mid \frac{2x-1}{x+1} < 1, x \in R\}$, 集合 $B = \{x \mid -1 \leq x-a \leq 1, x \in R\}$.

(1)求集合 A ;

(2)若 $B \cap (C_R A) = B$, 求实数 a 的取值范围.

17. (本小题满分 13 分)已知 $\tan \alpha = 2$.

(1)求 $\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 1}$ 的值;

(2)若 α 是第一象限角, 求 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值.

18. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = a^{2x} - a^x + 2a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像经过点 $A(1, 6)$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式

(2) 求 $f(x)$ 的最小值

(3) 设 $g(x) = \frac{f(x)}{2^x}$, 若 $g(x) \geq m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = -x^2 + (a-1)x + a$, 其中 $a \in R$.

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值;

(3) 当 $a < 0$ 时, 设函数 $g(x)$ 满足① $g(x) = f(x), \forall x \in [1, 3]$, ② $g(x+2) = g(x) + 2, \forall x \in R$, 求 $g(x)$ 在区间 $[-5, -3]$ 上的值域.

20. (本小题满分 15 分)

已知每投放 1 个单位的洗衣液在一定量水的洗衣机中, 它在水中释放的浓度 y (克/升) 随着时间 x (分钟)

变化的函数关系式近似为 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{24}{8-x} - 1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - \frac{1}{2}x, & 4 < x \leq 14 \end{cases}$. 某一时刻水中的洗衣液浓度为

每次投放的洗衣液在相应时刻所释放的浓度之和. 根据经验, 当水中洗衣液的浓度不低于 3 克/升时, 它能起到有效去污的作用.

(1) 若只投放一次 1 个单位的洗衣液, 求三分钟后水中洗衣液的浓度;

(2) 若只投放一次 1 个单位的洗衣液, 则有效去污时间可达分钟?

(3) 若第一次投放 2 个单位的洗衣液, 10 分钟后再投放 1 个单位的洗衣液, 则在第 12 分钟时(从第一次投放算起), 洗衣液是否还能起到有效去污的作用? 请说明理由.

21. (本小题满分 15 分)

已知集合 $S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 2) \text{ 是正整数 } 1, 2, 3, \dots, n \text{ 的一个排列}\}$, 函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ 对于 } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n, \text{ 定义:}$$

$$b_i = g(a_i - a_1) + g(a_i - a_2) + \dots + g(a_i - a_{i-1}), i \in \{2, 3, \dots, n\}, b_1 = 0$$

称 b_i 为 a_i 的满意指数, 排列 b_1, b_2, \dots, b_n , 为排列 a_1, a_2, \dots, a_n 的生成列

(1) 当 $n = 6$ 时, 写出排列 $3, 5, 1, 4, 6, 2$ 的生成列;

(2) 证明: 若 a_1, a_2, \dots, a_n 和 a_1', a_2', \dots, a_n' 为 S_n 中两个不同排列, 则它们的生成列也不同;

(3) 对于 S_n 中的排列 a_1, a_2, \dots, a_n , 进行如下操作: 将排列 a_1, a_2, \dots, a_n 从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项, 其它各项顺序不变, 得到一个新的排列, 证明: 新的排列各项满意指数之和比原排列各项满意指数之和至少增加 2.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。