绝密★启用前

天一大联考

2021—2022 学年高三年级上学期期末考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant a, x\in \mathbf{N}\}$，$B=\{1,2,3\}$，若 $A\cap B=B$，则 a 的取值范围是

A. $\{3\}$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $[3,4)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $(3+z)(2+i)=3+4i$，则 $|z|=$

A. 2　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

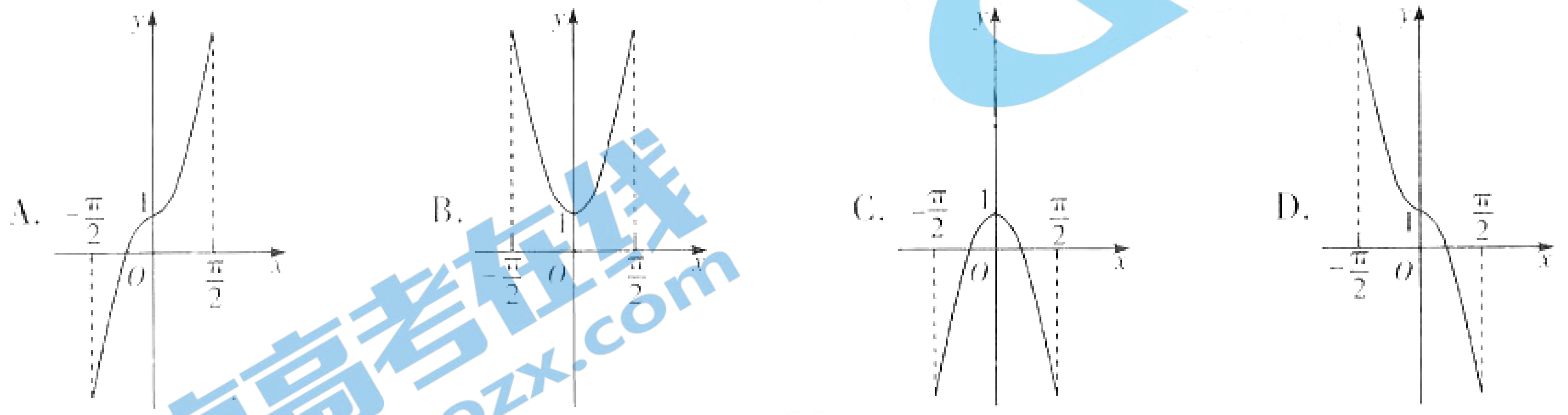
3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_4+a_5=7$，则 $S_8=$

A. 28　　B. 30　　C. 32　　D. 36

4. 某新冠疫苗接种点为了解 1 000 名 60～70 岁老人接种后的身体反应情况，先将这些老人编号为 1，2，…，1 000，再从这些老人中用系统抽样方法等距抽取 100 名老人进行回访调查，若 97 号老人被抽到，则被抽到的老人中编号按从小到大的顺序排在第 63 位的是

A. 267　　B. 627　　C. 637　　D. 717

5. 函数 $f(x)=(e^x-e^{-x})\sin x+1\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象大致是



6. 若某市高三某次数学测试的成绩 X（单位：分）服从正态分布 $N(96,16)$，则从该市任选 1 名高三学生，其这次数学测试的成绩在 100～108 分内的概率约为

参考数据：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.682\ 7$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 5$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.997\ 3$.

A. 0.157 3　　B. 0.341 35　　C. 0.498 65　　D. 0.135 9

7. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π,且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 为 $f(x)$ 的最小值,则 $\varphi=$

A. $-\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

8. 已知某种产品的销售成本 y(元)与该产品的数量 x(件)近似满足函数模型 $y=2.85\times10^{kx-1}$(k 为常数)。当生产 40 件该产品时,销售成本为 2 850 元。若该产品的销售成本减少为原来的 $\frac{1}{4}$,则该产品的数量与原来相比大约减少(　　)百件.(参考数据:$\lg 2\approx0.3$,$\lg 5\approx0.7$)

A. 6　　B. 8

C. 9　　D. 12

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,E,F,G 分别是棱 D_1C_1,AB,BC 的中点,P 是底面 $ABCD$ 内(包括边界)的动点,PD_1 // 平面 EFG,则 PD_1 的最小值为

A. 2　　B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

10. 已知在平面四边形 $ABCD$ 中,$AD=1$,$AB=2$,$\angle DAB=120^\circ$,$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$,则 $\lambda=$

A. 1 或 2　　B. 2

C. $\sqrt{3}+1$　　D. 0 或 2

11. 已知双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2,A,B 分别是它的两条渐近线上的两点(不与原点 O 重合),[illegible] 的面积为 [illegible],若双曲线 M 经过点 P,则该双曲线的实轴长为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{6}$

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,左、右顶点分别为 A,B,点 M 为椭圆 C 上不与 A,B 重合的任意一点,直线 AM 与直线 $x=2$ 交于点 D,过点 B,D 分别作 $BP\perp$ 直线 MF_2,$DQ\perp$ 直线 MF_2,垂足分别为 P,Q,则使 $|BP|+|DQ|<|BD|$ 成立的点 M

A. 有一个　　B. 有两个

C. 有无数个　　D. 不存在

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,公比为 q,$a_1a_2=3$,$S_4=S_2+18$,则 $q=$________.

14. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y-1\le x\le 1-y,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为________.

15. 三棱锥 $S-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的表面上,线段 SA 是球 O 的直径,$AC=BC=2$,$\angle ACB=120^\circ$,三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则球 O 的表面积为________.

16. 若关于 x 的不等式 [illegible] 恒成立,则 a 的取值范围是________

20.（12 分）

某校要组织知识竞赛，先分别在高一、高二年级内进行对抗预赛，然后高一、高二每个年级再派出预赛积分最高的一个队参加学校组织的决赛. 高一预赛积分最高的是甲队，积分为 8 分，高二预赛积分最高的是乙队，积分为 6 分. 决赛规则：甲、乙两队均要回答 2 道 A 组题和 2 道 B 组题，A 组题答对一题计 1 分，B 组题答对一题计 2 分，每题答错均不计分. 每队四道题答完后，积分高的获得冠军，若每队四道题答完后积分相同，则预赛成绩计入总分，总分高的获得冠军. 假设甲队答对 A 组每题的概率均为$\frac{2}{3}$，答对 B 组每题的概率均为$\frac{1}{2}$，乙队答对 A，B 两组每题的概率均为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求乙队决赛答对题数 X 的概率分布列；

（Ⅱ）求甲队答对 3 题，乙队至少答对 2 题，且甲队获得冠军的概率.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2}x+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)<e^{2a}-2$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\lambda,\\y=\sqrt{3}\lambda\end{cases}$（$\lambda$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，设 l 与 C 交于 P，Q 两点.

（Ⅰ）求 l 与 C 的极坐标方程；

（Ⅱ）求 $|OP|^2+|OQ|^2$ 的取值范围.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+a|+|2x-1|$.

（Ⅰ）若 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)\geqslant 8$，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）若对任意的 $b\in(1,+\infty)$，总存在 x_0 使 $f(x_0)<b+\frac{1}{b-1}+1$ 成立，求实数 a 的取值范围.

天一大联考
2021—2022 学年高三年级上学期期末考试
理科数学·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示、概念与运算.

解析　由 $A\cap B=B$，可知 a 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查复数的模的概念、复数的运算.

解析　因为 $3+z=\frac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$，所以 $z=-1+\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{2}$.

3. 答案　A

命题意图　本题考查等差数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系、等差数列的定义.

解析　依题意，$S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(a_4+a_5)}{2}=\frac{8\times 7}{2}=28$.

4. 答案　B

命题意图　本题考查系统抽样.

解析　将 1 000 名老人分成 100 个组，每组 10 名老人，97 号老人被抽到，所以第 1 组抽到 7 号，且第 1 组至第 100 组抽到的老人编号构成等差数列 $\{a_n\}$，公差 $d=10$，所以 $a_n=10n-3$，令 $n=63$，得第 63 位的编号是 627.

5. 答案　B

命题意图　本题考查函数的图象与性质.

解析　因为 $f(-x)=(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})\sin(-x)+1=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除 A，D，又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}})+1>0$，排除 C.

6. 答案　A

命题意图　本题考查正态分布.

解析　由 $X\sim N(96,16)$，可知 $\sigma=4$，由 3σ 原则，可知 $P(100<X\leqslant 108)=P(96+4<X\leqslant 96+3\times 4)=\frac{1}{2}(0.997\,3-0.682\,7)=0.157\,3$.

7. 答案　A

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质的综合应用.

解析　因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 为最小值，所以 $\omega=2$，由 $2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

8. 答案　A

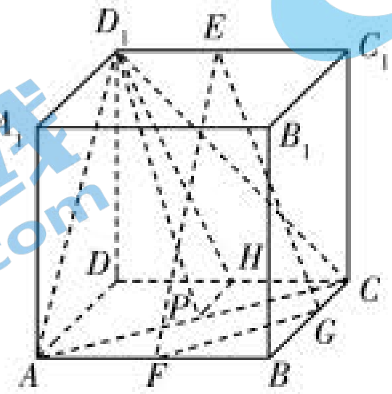
命题意图　本题主要考查函数模型的应用及指数、对数运算.

解析 由题可知 $2.85\times10^{40k-1}=2\ 850$，解得 $k=0.1$，所以 $y=2.85\times10^{0.1x-1}$. 设现在的销售成本为 y_1，对应的产品数量为 x_1，原来的销售成本为 y_2，对应的产品数量为 x_2，由题意知 $y_1=\frac{1}{4}y_2$，所以 $10^{0.1(x_2-x_1)}=4$，故 $x_2-x_1=10\lg 4\approx6$.

9. **答案** C

命题意图 本题考查线面平行的性质.

解析 因为 P 是动点，PD_1 // 平面 EFG，所以 P 在过 D_1 与平面 EFG 平行的平面 α 内，又 P 在底面 $ABCD$ 内，所以 P 在平面 α 与平面 $ABCD$ 的交线上，连接 AC，AD_1，D_1C，如图，易知 FG // AC，EF // AD_1，所以平面 EFG // 平面 D_1AC，P 在线段 AC 上. 当 $D_1P\perp AC$ 时，D_1P 最短，易得此时 $D_1P=\sqrt{6}$.



10. **答案** B

命题意图 本题考查向量的线性运算及数量积运算.

解析 因为 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})=-\lambda\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=-\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{AD}^2+\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\lambda(1-\lambda)|\overrightarrow{AD}|^2+\lambda|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos120^\circ=-\lambda+\lambda^2+\lambda\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=0$（不符合题意，舍去），故 $\lambda=2$.

11. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 由双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$，可知双曲线为等轴双曲线，故双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$，则其渐近线的方程为 $y=\pm x$. 设 $A(m,m)$，$B(n,-n)(m>0,n>0)$，易知 $\triangle AOB$ 为直角三角形，则 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|=mn=12$，又可知 P 为线段 AB 中点，即 $P\left(\frac{m+n}{2},\frac{m-n}{2}\right)$ 在双曲线上，所以 $a^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn=12$，$a=2\sqrt{3}$，故双曲线的实轴长为 $4\sqrt{3}$.

12. **答案** D

命题意图 本题考查椭圆的几何性质，直线与椭圆的位置关系.

解析 由题可知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$F_2(1,0)$，设直线 AM：$y=k(x+2)(k\neq0)$，则 $D(2,4k)$，设线段 BD 的中点为 E，则 $E(2,2k)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x+2),\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$. 设 $M(x_0,y_0)$，由根与系数的关系得 $-2x_0=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，解得 $x_0=\frac{6-8k^2}{3+4k^2}$，故有 $y_0=k(x_0+2)=\frac{12k}{3+4k^2}$，又 $F_2(1,0)$，所以当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时，$M\left(1,\pm\frac{3}{2}\right)$，$D(2,\pm2)$，此时 $MF_2\perp x$ 轴，四边形 $BPQD$ 为矩形，$|BP|+|DQ|=2$，$|BD|=2$，所以 $|BP|+|DQ|=|BD|$. 当 $k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时，$k_{PF_2}=\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{4k}{1-4k^2}$，所以直线 PF_2：$y=\frac{4k}{1-4k^2}(x-1)$，所以点 E 到直线 PF_2 的

距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{8k}{1-4k^2}-2k-\dfrac{4k}{1-4k^2}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{4k}{1-4k^2}\right)^2+1}}=2|k|$，而 $BD=4|k|$，即 $d=\dfrac{1}{2}|BD|$，因为四边形 $BPQD$ 为直角梯形，所以 $|BP|+|DQ|=2d=4|k|=|BD|$. 所以使 $|BP|+|DQ|<|BD|$ 成立的点 M 不存在.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 2

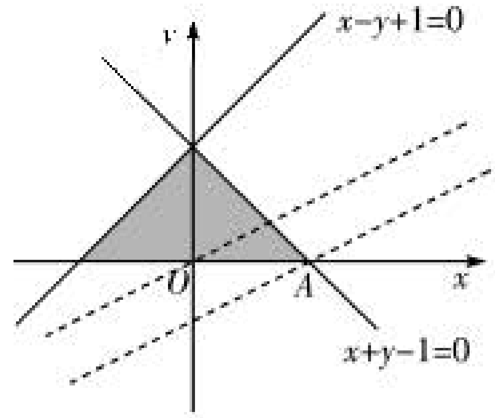
命题意图 本题考查等比数列的基本运算.

解析 因为 $S_4=S_2+18$，所以 $S_4-S_2=a_3+a_4=18$，即 $a_2q+a_2q^2=18$，所以 $q^2+q-6=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-3$（舍去），故 $q=2$.

14. **答案** 1

命题意图 本题考查线性规划.

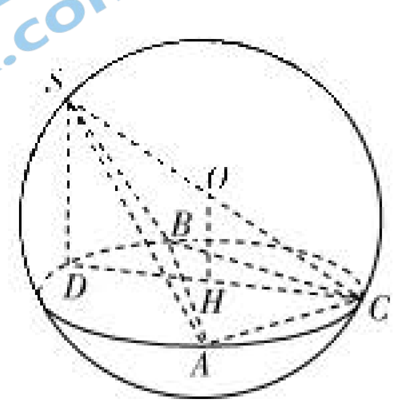
解析 $\begin{cases}y-1\leqslant x\leqslant 1-y,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-1\leqslant 0,\\ 0\leqslant y,\end{cases}$ 作出可行域，如图中阴影区域所示，当直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$ 过点 $A(1,0)$ 时，z 取得最大值，且最大值为 1.



15. **答案** 20π

命题意图 本题考查球与多面体的综合应用，球的表面积的计算.

解析 如图，设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 H，外接圆半径为 r，球的半径为 R，延长 CH 交圆 H 于 D，连接 SD，由球的性质，知 $OH\perp$ 平面 $ADBC$，$OH\perp CD$，又 $OH \mathrel{\underline{/\!/}} \dfrac{1}{2}SD$，所以 $SD\perp CD$，$SD\perp$ 平面 $ADBC$，因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120^\circ=\sqrt{3}$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}SD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $SD=2$，$OH=1$，在 $\triangle ABC$ 中，易知 $AB=2\sqrt{3}$，由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2r$，解得 $r=2$，则 $R^2=1^2+2^2=5$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.



16. **答案** $\{1\}$

命题意图 本题考查由不等式恒成立求参数的取值范围问题.

解析 不等式可化为 $a(x+\ln x)\leqslant e^{x}$……，令 $t=x+\ln x$，它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，值域为……

xe^x，不等式 $a(x+\ln x)\leqslant xe^x-1$ 可化为 $at\leqslant e^t-1$，即当 $t\in\mathbf{R}$ 时，$at\leqslant e^t-1$ 恒成立，在同一坐标系中画出函数 $f(t)=e^t-1$ 的图象与直线 $y=at$，由图可知当 $a\leqslant 0$ 时不符合题意，当 $a>0$ 时，$f(t)$ 的图象与直线 $y=at$ 都过原点，考虑 $f(t)$ 的图象过原点的切线，设切点为 $P(t_0,e^{t_0}-1)$，$f'(t)=e^t$，则切线方程为 $y-(e^{t_0}-1)=e^{t_0}(t-t_0)$，且过原点，所以 $1-e^{t_0}=-t_0e^{t_0}$，即 $1-e^{t_0}+t_0e^{t_0}=0$，设 $g(t)=1-e^t+te^t$，则 $g'(t)=te^t$，当 $t\in(-\infty,0)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，所以 $g(t)_{\min}=g(0)=0$，所以有唯一 $t_0=0$，使方程成立，即切点为 $(0,0)$，切线为 $y=t$，又易知 $e^t\geqslant t+1$，故所求的 a 的取值范围是 $\{1\}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查正余弦定理的综合应用.

解析　（Ⅰ）因为 $B+D=\pi$，所以 $\cos D=-\cos B=-\dfrac{1}{3}$. ……………………………………（2 分）

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D=1^2+3^2-2\times1\times3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$，

所以 $AC=2\sqrt{3}$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则 $S=S_{\triangle BAC}+S_{\triangle DAC}$.

因为 $S_{\triangle DAC}=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sin D=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{2}$. ……………………………………（6 分）

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cdot\cos B$，……………………………………（7 分）

即 $2AB^2-12=\dfrac{2}{3}AB^2$，得 $AB=BC=3$，……………………………………（9 分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sqrt{1-\cos^2 B}=3\sqrt{2}$，……………………………………（11 分）

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. ……………………………………（12 分）

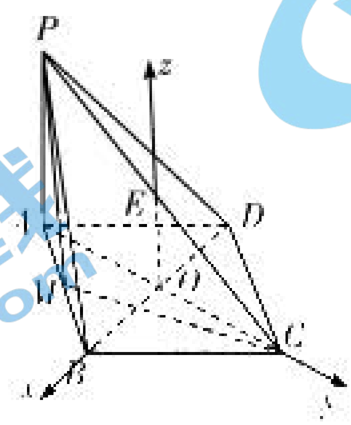
18. **命题意图**　本题考查线线垂直的证明及线面角的正弦值的求解.

解析　（Ⅰ）如图，连接 AC 交 BD 于点 O，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，……………（1 分）

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BD$，又 $AC\cap PA=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，……………………………………（4 分）

又 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PC$. ……………………………………（5 分）



（Ⅱ）设 E 为 PC 的中点，易知 $OE\perp$ 底面 $ABCD$.

以 O 为原点，OB,OC,OE 所在直线分别为 x,y,z 轴可建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，………（6 分）

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,-\sqrt{3},2)$.

因为 M 为 AB 的中点，所以 $M\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(0,2\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},-2\right)$，$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$. ……………………………………（7 分）

设平面 MPC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}2\sqrt{3}y_0-2z_0=0,\\ \dfrac{x_0}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0-2z_0=0,\end{cases}$

令 $y_0=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{n}=(9,\sqrt{3},3)$. ………………………………………………………………（9 分）

设直线 CD 与平面 MPC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{9+3}{\sqrt{9^2+(\sqrt{3})^2+3^2}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{93}}{31}$， ………（11 分）

即直线 CD 与平面 MPC 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{93}}{31}$. ……………………………………………………（12 分）

19. **命题意图**　本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的综合应用.

解析　（Ⅰ）由题意得 $F(1,0)$，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，$M(x_1,y_1)(y_1>0)$，$N(x_2,y_2)$，……………（1 分）

联立方程得 $\begin{cases}x=ty+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2-4ty-4=0$，

由根与系数的关系得 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$. ………………………………………………………………（3 分）

因为 $|MN|=3|NF|$，所以 $|MF|=2|NF|$，有 $y_1=-2y_2$，

结合 $y_1y_2=-4$，解得 $y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$， ………………………………………………………………（4 分）

所以 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

l 的方程为 $4x-\sqrt{2}y-4=0$. ………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）以 QF 为直径的圆的圆心为 $\left(\dfrac{n+1}{2},0\right)$，半径为 $\dfrac{n-1}{2}$，……………………………………………（7 分）

因为点 $M(x,y)$ 在该圆外，

所以 $\left(x-\dfrac{n+1}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2$，即 $x^2+(3-n)x+n>0$ 对任意 $x>0$ 恒成立. ……………（9 分）

令 $h(x)=x^2+(3-n)x+n$. 则

①$\Delta=(3-n)^2-4n=n^2-10n+9<0$，

解得 $1<n<9$；……………………………………………………………………………………（10 分）

② $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ \dfrac{n-3}{2}\leqslant 0,\\ h(0)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant n\leqslant 1$，又 $n\neq 1$，故 $0\leqslant n<1$. ……………………………………（11 分）

综上所述，n 的取值范围是 $[0,1)\cup(1,9)$. ………………………………………………………………（12 分）

20. **命题意图**　本题考查随机变量的分布列及概率的计算.

解析　（Ⅰ）乙队决赛答对题数 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，X 服从二项分布 $B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$， …………（2 分）

所以 X 的概率分布列如下表：

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$

(Ⅱ)设甲队答对 A 组题的题数为 i 的事件为 $A_i(i=0,1,2)$,答对 B 组题的题数为 i 的事件为 $B_i(i=0,1,2)$,乙队答对 A 组题的题数为 i 的事件为 $a_i(i=0,1,2)$,答对 B 组题的题数为 i 的事件为 $b_i(i=0,1,2)$.

甲队答对 3 题,乙队至少答对 2 题,且甲队获得冠军,只能是乙队答对 2 题或 3 题.

分两种情况:

①记"甲队答对 3 题,乙队答对 2 题,且甲队获得冠军"的事件为 M_1.

则 $M_1=A_2B_1a_2+A_2B_1b_2+A_2B_1a_1b_1+A_1B_2a_2+A_1B_2b_2+A_1B_2a_1b_1$,

所以 $P(M_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$. ………………………………… (7 分)

②记"甲队答对 3 题,乙队答对 3 题,且甲队获得冠军"的事件为 M_2,

则 $M_2=A_2B_1a_2b_1+A_1B_2a_2b_1+A_1B_2a_1b_2$,

所以 $P(M_2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{18}$. ……………………………………………………………… (10 分)

故甲队答对 3 题,乙队至少答对 2 题,且甲队获得冠军的概率为 $P=P(M_1)+P(M_2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{18}=\frac{13}{72}$.

……………………………………………………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质及证明不等式.

解析 (Ⅰ)由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=-\frac{x^2-2x+2a}{2x^2}$. ……………………………………………………… (1 分)

若 $x^2-2x+2a$ 的最小值 $2a-1\geqslant0$,即 $a\geqslant\frac{1}{2}$,则 $x^2-2x+2a\geqslant0$ 恒成立,

即 $f'(x)\leqslant0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;……………………………………………………… (2 分)

若 $1-\sqrt{1-2a}>0$,即 $0<a<\frac{1}{2}$,当 $x\in(0,1-\sqrt{1-2a})$ 或 $x\in(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(1-\sqrt{1-2a},1+\sqrt{1-2a})$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增; ……………………………… (4 分)

若 $1-\sqrt{1-2a}\leqslant0$,即 $a\leqslant0$,当 $x\in(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

当 $x\in(0,1+\sqrt{1-2a})$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增. ……………………………………………… (5 分)

综上,若 $a\geqslant\frac{1}{2}$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

若 $0<a<\frac{1}{2}$,$f(x)$ 在 $(0,1-\sqrt{1-2a})$,$(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 上单调递减,在 $(1-\sqrt{1-2a},1+\sqrt{1-2a})$ 上单调递增;

若 $a\leqslant0$,$f(x)$ 在 $(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 上单调递减,在 $(0,1+\sqrt{1-2a})$ 上单调递增. ………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $0<a<\frac{1}{2}$,且 $x_1+x_2=2$,$x_1x_2=2a$, ……………………………………………… (7 分)

则 $f(x_1)+f(x_2)=a\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\ln x_1+\ln x_2=a\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln(2a)$.

欲证不等式即 $\ln(2a)<e^{2a}-2$,

设 $h(t)=e^t-\ln t-2$，则 $h'(t)=e^t-\frac{1}{t}$，

显然 $h'(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，因为 $h'\left(\frac{1}{3}\right)=e^{\frac{1}{3}}-3<0$，$h'(1)=e-1>0$，

所以 $h'(t)=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一根 t_0，即 $e^{t_0}=\frac{1}{t_0}$. …………（10 分）

当 $t\in(0,t_0)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，当 $t\in(t_0,1)$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增，

所以 $h(t)_{\min}=h(t_0)=e^{t_0}-\ln t_0-2=\frac{1}{t_0}-\ln\frac{1}{e^{t_0}}-2=\frac{1}{t_0}+t_0-2>0$，

所以 $h(t)>0(0<t<1)$，故原命题得证. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查直角坐标方程与极坐标方程的互化，参数方程与普通方程的互化，极坐标方程的应用.

解析 （Ⅰ）l 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$，化为极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. …………（2 分）

将圆 C 的参数方程变形为 $\begin{cases}x-a=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$ 平方相加得 $(x-a)^2+y^2=1$，…………（3 分）

化为极坐标方程为 $\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-1=0$. …………（5 分）

（Ⅱ）将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入圆 C 的极坐标方程得 $\rho^2-a\rho+a^2-1=0$.

设 $|\rho_1|=|OP|$，$|\rho_2|=|OQ|$，则 $\rho_1+\rho_2=a$，$\rho_1\rho_2=a^2-1$，…………（6 分）

$\Delta=a^2-4(a^2-1)>0$，解得 $0\leqslant a^2<\frac{4}{3}$. …………（7 分）

所以 $|OP|^2+|OQ|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=a^2-2(a^2-1)=2-a^2$. …………（8 分）

所以 $|OP|^2+|OQ|^2$ 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3},2\right]$. …………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质与解法.

解析 （Ⅰ）$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)\geqslant 8$，即 $|a+1|+|a-2|+3\geqslant 8$，亦即 $|a+1|+|a-2|\geqslant 5$，…………（1 分）

等价于不等式组 $\begin{cases}a\leqslant -1,\\ -a-1-a+2\geqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<a\leqslant 2,\\ a+1-a+2\geqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>2,\\ a+1+a-2\geqslant 5,\end{cases}$ …………（3 分）

解得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 3$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$. …………（5 分）

（Ⅱ）对任意的 $b\in(1,+\infty)$ 总存在 x_0，使 $f(x_0)<b+\frac{1}{b-1}+1$ 成立，等价于 $f(x)_{\min}<\left(b+\frac{1}{b-1}+1\right)_{\min}$.

…………（6 分）

因为 $f(x)=|2x+a|+|2x-1|\geqslant|a+1|$，所以 $f(x)_{\min}=|a+1|$. …………（7 分）

又 $b+\frac{1}{b-1}+1=b-1+\frac{1}{b-1}+2\geqslant 4$，$b\in(1,+\infty)$，当且仅当 $b=2$ 时取等号，

所以 $\left(b+\frac{1}{b-1}+1\right)_{\min}=4$. …………（8 分）

由 $|a+1|<4$，解得 $-5<a<3$，故所求实数 a 的取值范围是 $(-5,3)$. …………（10 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。