工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至2页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题: 本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid \lg x<1\}$, $B=\{x\mid x>3\}$,则 $A\cup B=$

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(3,10)$　　(C) $(-\infty,+\infty)$　　(D) $(3,+\infty)$

2. 已知 i 为虚数单位,则复数 $z=(1+i)(2-i)$ 的虚部为

(A) $-i$　　(B) i　　(C) -1　　(D) 1

3. 命题“ $\forall x>0, x^2+x+1>0$”的否定为

(A) $\exists x_0\leqslant 0, x_0^2+x_0+1\leqslant 0$　　(B) $\forall x\leqslant 0, x^2+x+1\leqslant 0$

(C) $\exists x_0>0, x_0^2+x_0+1\leqslant 0$　　(D) $\forall x>0, x^2+x+1\leqslant 0$

4. 袋子中有5个大小质地完全相同的球,其中3个红球和2个白球,从中不放回地依次随机摸出两个球,则摸出的两个球颜色相同的概率为

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$,则 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值为

(A) $-\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) -3　　(D) 3

6. 在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，D为BC边中点，点O在直线AD上，且$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}=3$，则$BC$边的长度为

(A) $\sqrt{6}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $2\sqrt{6}$　　(D) 6

7. 已知圆柱的两个底面的圆周在体积为$\dfrac{32\pi}{3}$的球O的球面上，则该圆柱的侧面积的最大值为

(A) 4π　　(B) 8π　　(C) 12π　　(D) 16π

8. 已知P是曲线$y=\sin x+\cos x\left(x\in\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]\right)$上的动点，点$Q$在直线$x+y-6=0$上运动，则当$|PQ|$取最小值时，点$P$的横坐标为

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

9. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=n^2$，记数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，$n\in\mathbf{N}^*$．则使得$T_n<\dfrac{20}{41}$成立的$n$的最大值为

(A) 17　　(B) 18　　(C) 19　　(D) 20

10. 某工厂产生的废气经过过滤后排放，过滤过程中废气的污染物数量P(mg/L)与时间t(h)之间的关系为$P=P_0e^{-kt}$．如果前2小时消除了20%的污染物，则污染物减少50%大约需要的时间为(参考数据：$\ln2\approx0.69$，$\ln3\approx1.10$，$\ln5\approx1.61$)

(A) 4h　　(B) 6h　　(C) 8h　　(D) 10h

11. 已知F为抛物线$y^2=2x$的焦点，A为抛物线上的动点，点$B(-1,0)$．则当$\dfrac{2|AB|}{2|AF|+1}$取最大值时，$|AB|$的值为

(A) 2　　(B) $\sqrt{5}$　　(C) $\sqrt{6}$　　(D) $2\sqrt{2}$

12. 已知四面体$ABCD$的所有棱长均为$\sqrt{2}$，M，N分别为棱AD，BC的中点，F为棱AB上异于A，B的动点．有下列结论：

①线段MN的长度为1；

②若点G为线段MN上的动点，则无论点F与G如何运动，直线FG与直线CD都是异面直线；

③$\angle MFN$的余弦值的取值范围为$\left[0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$；

④$\triangle FMN$周长的最小值为$\sqrt{2}+1$．

其中正确结论的个数为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

第Ⅱ卷 （非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x, x<1,\\ 2^x+1, x\geq 1.\end{cases}$ 若 $f(a)=2$，则 a 的值为______．

14. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+2}=a_{n+1}^2, n\in \mathbf{N}^*$．若 $a_5=\frac{1}{9}$，$a_2a_4=1$，则 a_2 的值为______．

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一象限内的交点为 P，直线 PF_1 与双曲线的渐近线在第二象限内的交点为 Q．若点 Q 恰好为线段 PF_1 的中点，则直线 PF_1 的斜率的值为______．

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，且对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)<x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$ 成立．若 $a=f(\ln 2)$，$b=f(\log_{0.2}0.03)$，$c=f(2^{0.7})$，则 a,b,c 的大小关系为______．（用符号"$<$"连接）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $(\sqrt{2}b-a)\cos C=c\cos A$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{2}$，$c(a\cos B-b\cos A)=b^2$，求△ABC 的面积．

18.（本小题满分 12 分）

某种机械设备随着使用年限的增加，它的使用功能逐渐减退，使用价值逐年减少，通常把它使用价值逐年减少的"量"换算成费用，称之为"失效费"．某种机械设备的使用年限 x（单位：年）与失效费 y（单位：万元）的统计数据如下表所示：

使用年限 x（单位：年）	1	2	3	4	5	6	7
失效费 y（单位：万元）	2.90	3.30	3.60	4.40	4.80	5.20	5.90

（Ⅰ）由上表数据可知，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系．请用相关系数加以说明；（精确到 0.01）

（Ⅱ）求出 y 关于 x 的线性回归方程，并估算该种机械设备使用 10 年的失效费．

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$．

线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距最小二乘估计计算公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$．

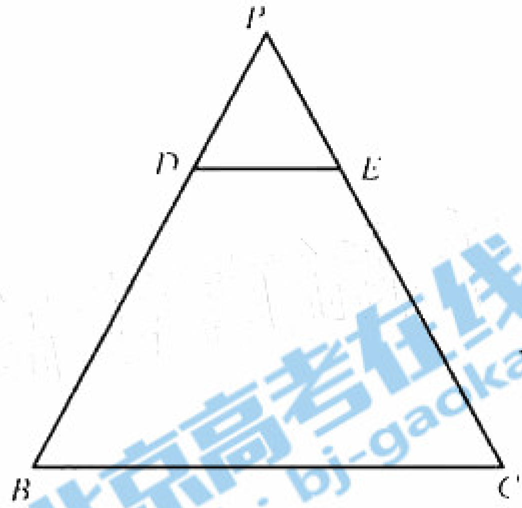
参考数据：$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=14.00$，$\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2=7.08$，$\sqrt{198.24}\approx 14.10$．

19.（本小题满分 12 分）

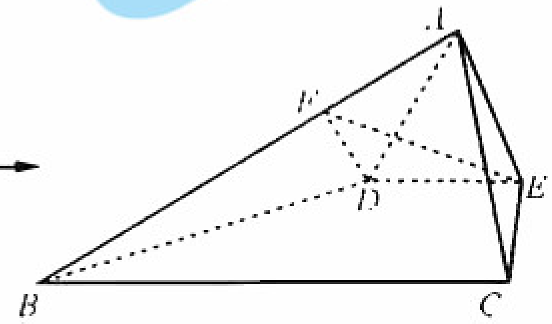
如图①，在等腰三角形 PBC 中，$PB=PC=3\sqrt{5}$，$BC=6$，D，E 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DP}$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EP}$．将△$PDE$ 沿直线 DE 折起到△ADE 的位置，连接 AB，AC，得到如图②所示的四棱锥 $A-BCED$，点 F 满足 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$．

（Ⅰ）证明：DF // 平面 ACE；

（Ⅱ）当 $AB=\sqrt{29}$ 时，求平面 ACE 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值．



图①



图②

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，其长半轴长为 2．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设经过点 $B(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 D，E 两点，点 E 关于 x 轴的对称点为 F，直线 DF 与 x 轴相交于点 G，求△DEG 的面积 S 的取值范围．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}-(a-1)\ln x-2$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）若 $f(x)$ 存在唯一极值点，且极值为 0，求 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 在区间 $[1,e^2]$ 上的零点个数．

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑．

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-6=0$．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（Ⅰ）求曲线 C 和直线 l 的极坐标方程；

（Ⅱ）若点 $P(x,y)$ 在直线 l 上且 $y>0$，射线 OP 与曲线 C 相交于异于 O 点的点 Q，求 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 的最小值．

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

设函数 $f(x)=3|x+1|+|2x-1|$ 的最小值为 m．

（Ⅰ）求 m 的值；

（Ⅱ）若 $a,b\in(0,+\infty)$，证明：$(\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant m^2$．

成都市 2018 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A; 2. D; 3. C; 4. B; 5. D; 6. A; 7. B; 8. C; 9. C; 10. B; 11. C; 12. B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. -1; 14. 3; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $b<c<a$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2}\sin B\cos C-\sin A\cos C=\sin C\cos A$. ……2 分

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)$. ……3 分

$\because A+C=\pi-B$, $\therefore \sin(A+C)=\sin B$.

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C=\sin B$. ……4 分

又 $\because \sin B\neq 0$, $\therefore \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……5 分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{4}$. ……6 分

(Ⅱ)由已知及余弦定理,得 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$. ……8 分

化简,得 $a^2=2b^2$. ……9 分

又 $\because a=\sqrt{2}$, $\therefore b=1$. ……10 分

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$. ……12 分

18. 解:(Ⅰ)由题意,知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$, ……1 分

$\bar{y}=\frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7}=4.30$, ……2 分

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$. ……3 分

$\therefore r=\frac{14.00}{\sqrt{28\times 7.08}}=\frac{14.00}{\sqrt{198.24}}\approx\frac{14.00}{14.10}\approx 0.99$. ……5 分

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……6 分

(Ⅱ)$\because \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{14}{28}=0.5$, ……8 分

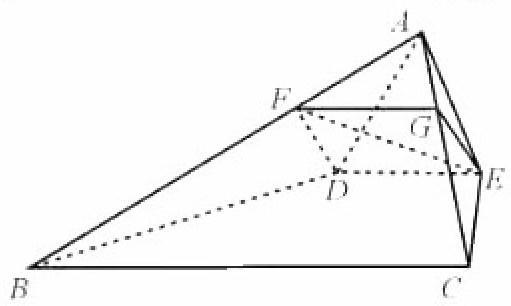
$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.3-0.5\times 4=2.3$. ……9 分

$\therefore$ y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$. ……10 分

将 $x=10$ 代入线性回归方程,得 $\hat{y}=0.5\times 10+2.3=7.3$.

$\therefore$估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元. ……12 分

19. 解:(Ⅰ)如图,在棱 AC 上取点 G 满足 $CG=2AG$,连接 EG,FG. ……1 分



$\because \overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$,$\therefore FG\parallel BC$ 且 $FG=\dfrac{1}{3}BC$.

又由题意,可得 $DE\parallel BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{3}BC$.

$\therefore$ $DE=FG$ 且 $DE\parallel FG$.

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形. ……3 分

$\therefore DF\parallel EG$.

又 $\because DF\not\subset$ 平面 ACE,$EG\subset$ 平面 ACE,

$\therefore DF\parallel$ 平面 ACE. ……5 分

(Ⅱ)如图,分别取 DE,BC 的中点 M,N,连接 AM,MN,BM.

由题意,知 $MN\perp BC$,$AM=2$,$MN=4$,$BN=3$.

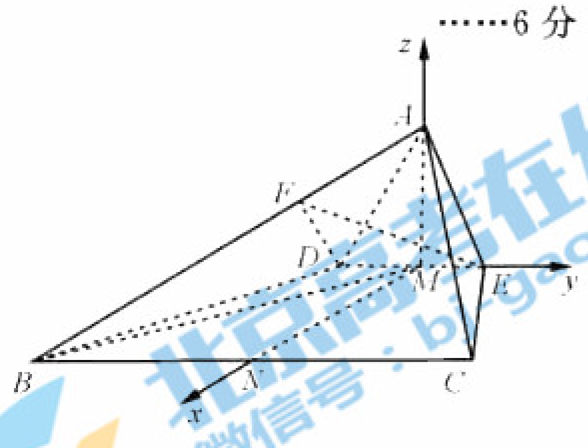
在 Rt$\triangle BMN$ 中,$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在$\triangle ABM$ 中,$\because AB=\sqrt{29}$,$\therefore AM^2+BM^2=2^2+5^2=29=AB^2$.

$\therefore AM\perp BM$. ……6 分

又 $AM\perp DE$,$BM\cap DE=M$,$BM,DE\subset$ 平面 $BCED$,

$\therefore AM\perp$ 平面 $BCED$. ……7 分



以 M 为坐标原点,$\overrightarrow{MN}$,$\overrightarrow{ME}$,$\overrightarrow{MA}$ 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $Mxyz$.

则 $M(0,0,0)$,$A(0,0,2)$,$B(4,-3,0)$,$C(4,3,0)$,$D(0,-1,0)$,$E(0,1,0)$,$F(\dfrac{4}{3},-1,\dfrac{4}{3})$.

$\therefore$ $\overrightarrow{EC}=(4,2,0)$,$\overrightarrow{EA}=(0,-1,2)$,$\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{DF}=(\dfrac{4}{3},0,\dfrac{4}{3})$. ……8 分

设平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}4x_1+2y_1=0\\ -y_1+2z_1=0\end{cases}$. 令 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(-1,2,1)$. ……9 分

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}2y_2=0\\ \dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{4}{3}z_2=0\end{cases}$. 令 $z_2=1$,得 $\boldsymbol{n}=(-1,0,1)$. ……10 分

$\therefore \cos < \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} > = \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……11 分

$\therefore$ 平面 ACE 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)由已知,得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. ……1 分

$\because$ 椭圆 C 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\therefore \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$,解得 $b^2=1$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……4 分

(Ⅱ)由题意,知直线 l 的斜率存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq 0)$, $D(x_1,y_1)$,$E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x=ty-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$,消去 x,得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$. ……5 分

$\because \Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$,

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2t}{t^2+4}$, $y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$. ……6 分

$\because$ F 为点 E 关于 x 轴的对称点, $\therefore F(x_2,-y_2)$.

$\therefore$ 直线 DF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,

即 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$. ……7 分

令 $y=0$,则 $x=x_1+\dfrac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$$=\frac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot(-\frac{3}{2t})-1=-4.$$

$\therefore G(-4,0)$. ……8 分

$\therefore \triangle DEG$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{(\frac{2t}{t^2+4})^2+\frac{12}{t^2+4}}=\frac{6\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}.$$ ……10 分

令 $m=\sqrt{t^2+3}$,则 $m\in(\sqrt{3},+\infty)$.

$\therefore S=\dfrac{6m}{m^2+1}=\dfrac{6}{m+\dfrac{1}{m}}$.

$\because m+\dfrac{1}{m}\in(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$, $\therefore S\in(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$.

$\therefore \triangle DEG$ 的面积 S 的取值范围为 $(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)由已知，可得 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-a)}{x^2}(x>0)$. ……1 分

①若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，与 $f(x)$ 存在极值点矛盾； ……2 分

②若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=a$.

∴当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

∴ $f(x)$ 存在唯一极小值点 $x=a$.

∴ $f(a)=a+1-(a-1)\ln a-2=(a-1)(1-\ln a)=0$. ……3 分

∴ $a=1$ 或 $a=e$. ……4 分

(Ⅱ)①当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,e^2]$ 上恒成立，∴ $f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上单调递增.

∵ $f(1)=a-1\leqslant 0$，$f(e^2)=e^2+\dfrac{a}{e^2}-2a$，

(i)当 $a\leqslant 0$ 时，$f(e^2)=e^2+\dfrac{a}{e^2}-2a=e^2+a(\dfrac{1}{e^2}-2)>0$；

(ii)当 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(e^2)=e^2+\dfrac{a}{e^2}-2a>2\sqrt{a}-2a=2\sqrt{a}(1-\sqrt{a})\geqslant 0$.

∴ $f(e^2)>0$.

∴由零点存在性定理，知 $f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 1 个零点； ……6 分

②当 $1<a<e^2$ 时，

∵当 $x\in[1,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,e^2]$ 时，$f'(x)>0$，

∴ $f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，在 $(a,e^2]$ 上单调递增.

∴ $f(x)_{\min}=f(a)=(a-1)(1-\ln a)$.

(i)当 $a=e$ 时，$f(x)_{\min}=0$，此时 $f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 1 个零点； ……7 分

(ii)当 $1<a<e$ 时，$f(x)_{\min}>0$，此时 $f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上无零点； ……8 分

(iii)当 $e<a<e^2$ 时，$f(x)_{\min}<0$，$f(1)=a-1>0$.

(a)当 $f(e^2)=e^2+\dfrac{a}{e^2}-2a<0$，即 $\dfrac{e^4}{2e^2-1}<a<e^2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 1 个零点；

(b)当 $f(e^2)=e^2+\dfrac{a}{e^2}-2a\geqslant 0$，即 $e<a\leqslant\dfrac{e^4}{2e^2-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 2 个零点；

……10 分

③当 $a\geqslant e^2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,e^2]$ 上恒成立，∴ $f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上单调递减.

∵ $f(1)=a-1>0$，$f(e^2)=e^2+(\dfrac{1}{e^2}-2)a\leqslant e^2+(\dfrac{1}{e^2}-2)e^2=-e^2+1<0$，

∴ $f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 1 个零点. ……11 分

综上，当 $1<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上无零点；

当 $a\leqslant 1$ 或 $a=e$ 或 $a>\dfrac{e^4}{2e^2-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 1 个零点；

当 $e<a\leqslant\dfrac{e^4}{2e^2-1}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有 2 个零点. ……12 分

22. 解：（Ⅰ）由曲线 C 的参数方程，得曲线 C 的普通方程为

$(x-1)^2+y^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. ……1 分

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，得

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$， ……3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$，即 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=3$. ……5 分

（Ⅱ）设点 P 的极坐标为 (ρ_1,θ)，点 Q 的极坐标为 (ρ_2,θ)，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

由（Ⅰ）知 $|OP|=\rho_1=\frac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$，$|OQ|=\rho_2=2\cos\theta$. ……7 分

$\therefore \frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\frac{6}{1+\cos2\theta+\sqrt{3}\sin2\theta}$

$=\frac{6}{1+2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})}$. ……9 分

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$. $\therefore -\frac{1}{2}<\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$.

$\therefore$ 当 $\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{|OP|}{|OQ|}$ 取得最小值 2. ……10 分

23. 解：（Ⅰ）当 $x<-1$ 时，$f(x)=-3x-3-2x+1=-5x-2>3$； ……1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x+3-2x+1=x+4\in[3,\frac{9}{2}]$； ……2 分

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x+3+2x-1=5x+2>\frac{9}{2}$. ……3 分

综上，当 $x=-1$ 时，$f(x)_{\min}=3$，$\therefore m=3$. ……5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），即证 $(\frac{1}{a}+1+\frac{b^2}{a})(\frac{1}{b}+1+\frac{a^2}{b})\geqslant 9$.

$\because a,b\in(0,+\infty)$，

$\therefore \frac{1}{a}+1+\frac{b^2}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$，$\frac{1}{b}+1+\frac{a^2}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$. ……7 分

$\therefore (\frac{1}{a}+1+\frac{b^2}{a})(\frac{1}{b}+1+\frac{a^2}{b})\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}=9$. ……9 分

当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{a}=1=\frac{b^2}{a},\\ \frac{1}{b}=1=\frac{a^2}{b}\end{cases}$ 即 $a=b=1$ 时，等号成立. ……10 分