

人大附中 2022 届高三 8 月开学考

数学

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，选择符合题目要求的一项）。

1. 下列函数中，最小正周期为 π 的偶函数为

【 】

A. $y = \tan 2x$

B. $y = \sin |x|$

C. $y = |\cos 2x|$

D. $y = |\sin x|$

2. 集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, 满足 $A \cup B = C$ 的集合 C 的个数为

【 】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. “ $a \leq 1$ ”是“函数 $f(x) = |x - a|$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增”的

【 】

A. 充分不必要条件

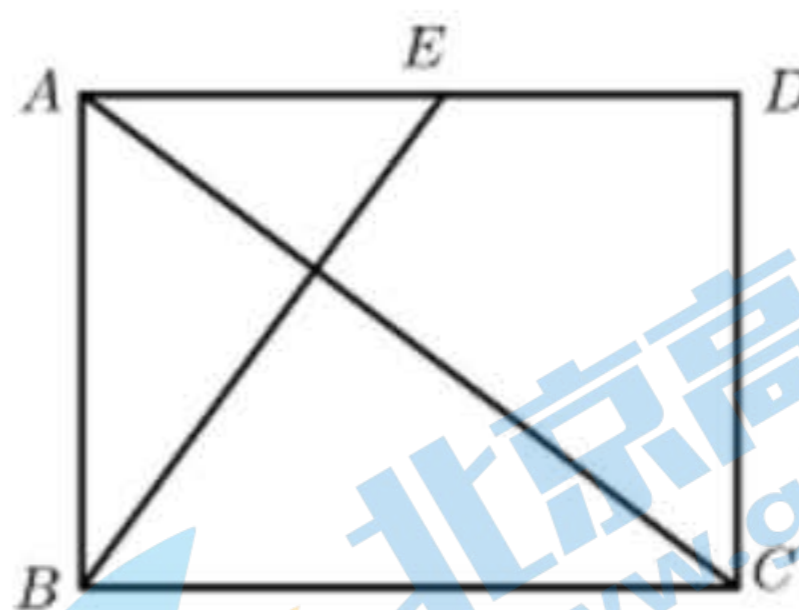
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3, BC = 4$, E 为 AD 上一点， $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. 若 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为

【 】



A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{9}{8}$

C. $\frac{25}{16}$

D. $\frac{29}{18}$

5. 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有公共的焦点 F_1, F_2 , 若 C_1, C_2 的四个交点与两个焦点六点共圆，则椭圆 C_2 的离心率为

【 】

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所,分上、中、下三层,上层中心有一块圆形石板(称为天心石),环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环,向外每环依次增加9块,下一层的第一环比上一层的最后一环多9块,向外每环依次也增加9块,已知每层环数相同,且下层比中层多729块,则下层最后一环的石板数为 【 】

- A. 189
- B. 216
- C. 243
- D. 270

7. 对满足 $\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y} = 1$ 的任意正实数 x, y , 不等式 $x + \frac{y}{4} > a^2 - 3a + 1$ 恒成立, 实数 a 的取值范围是 【 】

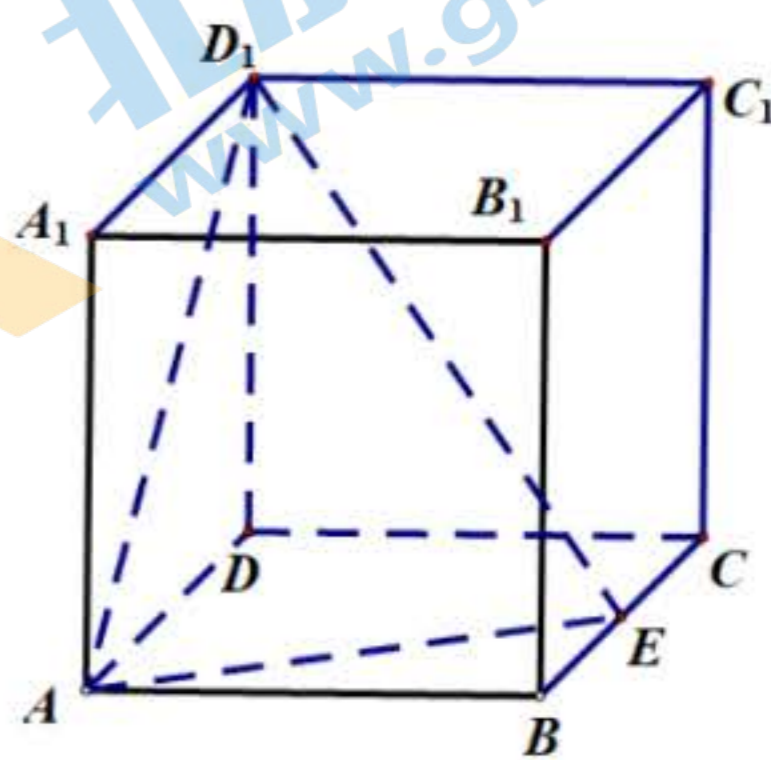
- A. $\{a | -1 \leq a \leq 4\}$
- B. $\{a | -1 < a < 4\}$
- C. $\{a | -4 \leq a \leq 1\}$
- D. $\{a | -4 < a < 1\}$

8. 在标准温度和大气压下, 人体血液中氢离子的物质的量的浓度(单位 mol/L , 记作 $[H^+]$) 和氢氧根离子的物质的量的浓度(单位 mol/L , 记作 $[OH^-]$) 的乘积等于常数 10^{-14} 、经多次检测, 某患者血液的 pH 值保持在 7.2~7.35 之间 (pH 值的定义为 $pH = -\lg[H^+]$), 该患者血液中的 $\frac{[H^+]}{[OH^-]}$ 可以为 【 】

参考数据: $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$.

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{3}$
- D. $\frac{1}{6}$

9. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 BC 的中点, F 是侧面 BCC_1B_1 上的动点, 且 $AF_1 \parallel$ 平面 AD_1E , 则 AF_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值构成的集合是 【 】



- A. $[\frac{1}{2}, 1]$
- B. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}]$
- C. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$
- D. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{5}]$

10. 若关于 x 的不等式 $|kx - \sqrt{4-x^2} + 6| \leq \sqrt{k^2+1}$ 有解, 则实数 k 的取值范围是

A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

B. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

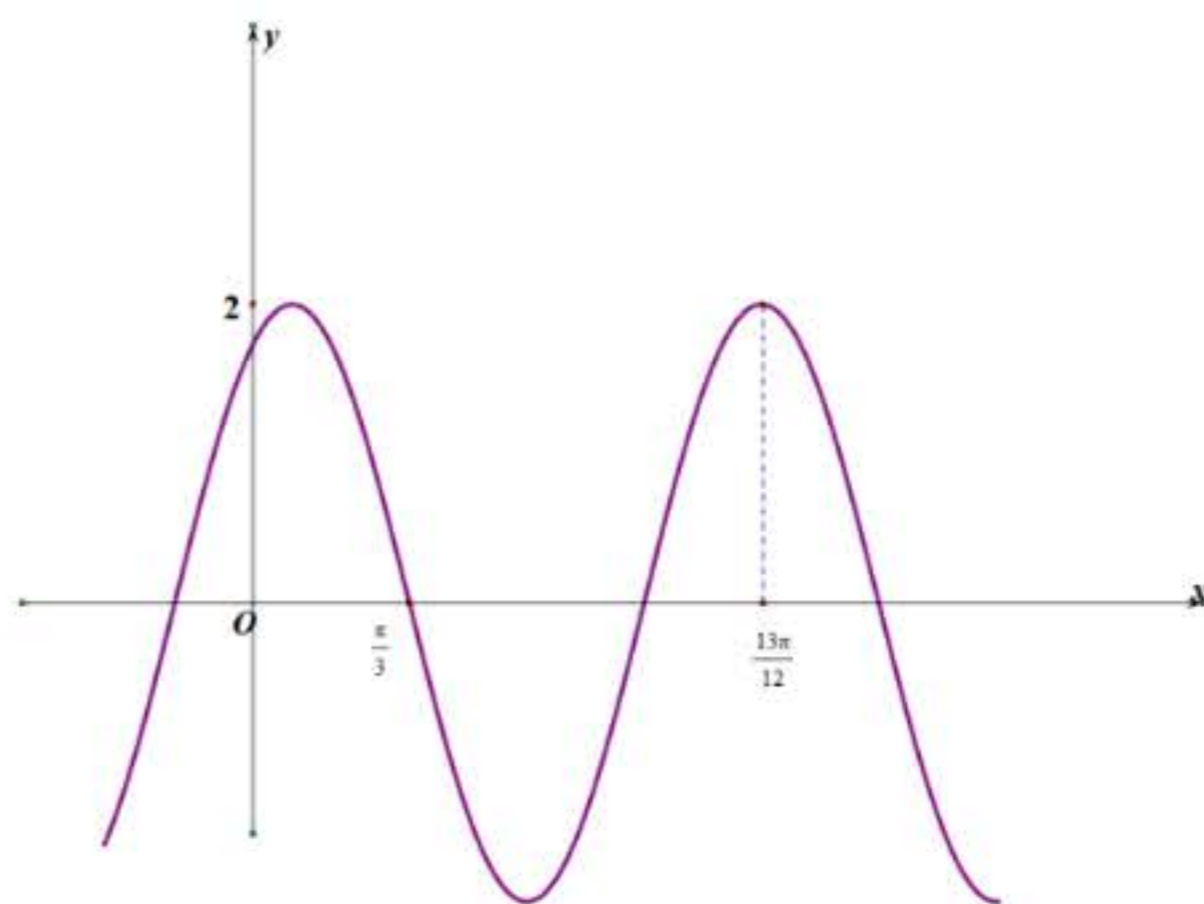
C. $[-2, 2]$

D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

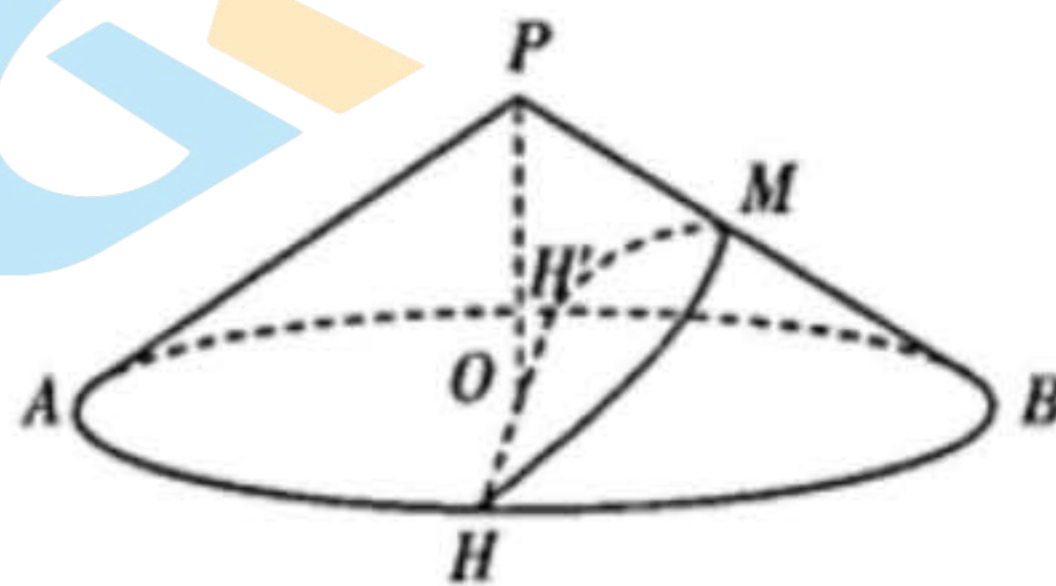
11. 在二项式 $(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}})^5$ 的展开式中, 常数项为_____.

12. 若函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的最大值为_____, 最小值为_____.



13. 在平面直角坐标系中, 向量 a 与向量 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|a-2b| = 2\sqrt{3}$, 若 $a = (\sqrt{3}, -1)$, 则 $b =$ _____.

14. 如图, P 为圆锥的顶点, 点 A, H, B, H' 将圆锥底面的圆 O 四等分, 《晓观数学公众号》从 H 出发经过 PB 的中点 M 到 H' 的路线为抛物线, 若该圆锥的体积为 128π , $HH' = 16$, 则 $OM =$ _____, 该抛物线的焦点到准线的距离为_____.



15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2x-4|-ax, & x > 0 \\ |x^2+5x+4|+ax, & x \leq 0 \end{cases}$ 给出下列四个结论:

- ①存在 $a \geq 0$, 使得 $f(x)$ 恰有六个零点;
- ②对任意 $a \geq 0$, $f(x)$ 至少有三个零点;
- ③对任意 $a < 0$, $f(x)$ 没有零点;
- ④当且仅当 $a=1$ 时, $f(x)$ 恰有五个零点.

其中,所有正确结论的序号是_____.

注:本题全对的得 5 分,选了错误选项的得 0 分.否则每选一个正确选项得 1 分.

三、解答题 (本大题共 6 小题,共 85 分,请在答题纸上的相应位置作答.解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.)

16. (本小题 13 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=2$, 再从条件①至条件④这四个条件中选择两个作为已知,使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定,求角 A 的大小及 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 1$;

条件②: $a\sin B = \sqrt{3}bc\cos \frac{B+C}{2}$;

条件③: $a\sin(A+C) = b\sin 2A$;

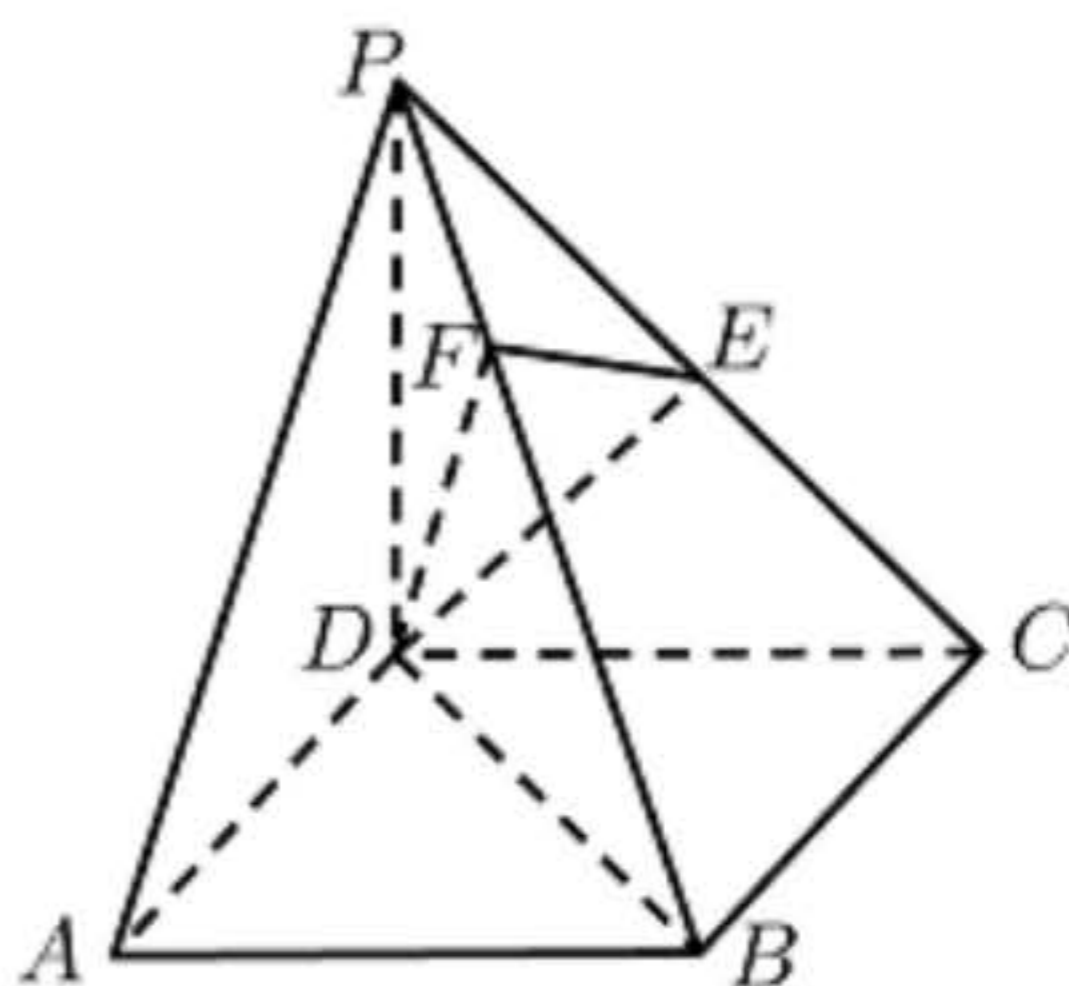
条件④: $\triangle ABC$ 的周长等于 6.

注:务必按照要求选择条件,如果选择多组条件分别解答,按第一个解答计分.

17. (本小题 14 分) 《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑.

如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PD=DC$ ， $CB=CP$ ， E 为棱 PC 的中点， F 为棱 PB 上一点 $FP < FB$ ，连接 DB, DE, DF, EF .

- (1) 求证: $DE \perp$ 平面 PBC ;
- (2) 若 $EF \perp PB$ ，连接 BE ，判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑. 若是，写出其每个面的直角; 若不是，写出其不是直角三角形的面;
- (3) 延长 FE ， BC 交于点 G ，连接 DG ，若二面角 $F-DG-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ ，求 $\frac{PF}{PB}$



18. (本小题 14 分) 为缓解同学们的压力, 班委会决定组织游戏, 每轮游戏前, 主持人准备好甲、乙两个袋子, 甲袋中有 3 个白球, 2 个黑球, 乙袋中有 4 个白球, 4 个黑球, 参加游戏的同学每抽出 1 个白球须做 3 个俯卧撑, 每抽出 1 个黑球, 须做 6 个俯卧撑.

①第一轮游戏: 小北同学从甲、乙两个袋子中各随机抽出 1 个球;

②第二轮游戏: 主持人随机将甲袋中的 2 个球放入乙袋, 然后小西同学从乙袋中随机抽出 1 个球;

③第三轮游戏: 主持人随机将乙袋中的 2 个球放入甲袋, 然后小东同学从甲袋中随机抽出 1 个球.

(1) 求小北须做 6 个俯卧撑的概率;

(2) 设小西须做俯卧撑的个数为 X , 求 X 的分布列;

(3) 如果你可以选择按小西方案或小东方案参加游戏, 且希望少做俯卧撑, 那么你应该选择小西方案, 小东方案, 还是两个方案都一样? (结论不要求证明)

19. (本小题 14 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 上顶点为 B , 离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, O 为坐标原点,

$\triangle OBF$ 的面积为 1,

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M , 与 y 轴负半轴交于点 N , 《晓观数学公众号》过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P . 若 $MP \parallel BF$, 求直线 l 的方程.

20. (本小题 15 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ex + 2kx + kx^2 \ln x}{x^2}$.

(1) 当 $k=0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 的某条切线与 x 轴平行, 求该切线方程;

(2) 当 $k \geq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在两个极值点, 求 k 的取值范围.

21. (本小题 15 分) 已知有限数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n, (n \geq 3)$, 将其中相邻的两项 a_i, a_{i+1} 或尾首两项 a_n, a_1 加上同一个实数 x 称为一次操作, 分别记为 $\varphi_x(i, i+1), \varphi_x(n, 1)$, 操作后的数列仍用 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 表示. 若经过有限次操作后 (每次操作所加实数均可任意选取), 《晓观数学公众号》数列 A 可以变为常数列, 则称数列 A 可等, 称上述操作的次数的最小值为数列 A 的阶,

(1) 已知数列 $B: 1, 2, 3$, 数列 $C: 1, 2, 3, 4$, 数列 $D: 1, 2, 3, 4, 5$, 写出其中所有的可等数列, 并求其阶;

(2) 已知数列 E 是 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的一个排列, 数列 F 是 $1, 2, 3, \dots, 7.8$ 的一个排列, 求上述数列中可等数列的阶的最小值;

(3) 已知数列 G 是 $1, 2, 3, \dots, 8, 9$ 的一个排列, 求上述数列中可等数列的阶的最大值与最小值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018