1. 答案　D

解析　$U=\{x\in N||x-3|\leqslant 3\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$\complement_U A=\{0,1,3,5,6\}$．故选 D.

2. 答案　A

解析　因为$\frac{11+10i}{3-2i}=\frac{(11+10i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=1+4i$，所以复数 z 在复平面内对应的点是(1，4)，位于第一象限．

3.答案　A

解析　函数$f(x)=x+\frac{2}{x}$在$(-\infty,-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$单调递增，在$(-\sqrt{2},0)$，$(0,\sqrt{2})$单调递减，

若函数 f(x)的定义域为$[2,+\infty)$，则函数 f(x)的值域为$[3,+\infty)$，

反之不成立，例如若函数 f(x)的定义域为$(0,1)\cup[2,+\infty)$，函数 f(x)的值域也为$[3,+\infty)$，故选 A。

4.答案 B

解析 $\because\cos\left(2\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})-1=-\frac{5}{9}$．故选 B.

5.答案 C

解析 由题意可得$\frac{3}{2}a_2=-a_1+a_3$，又$\{a_n\}$为等比数列.设公比为 q

$\frac{3}{2}a_1q=-a_1+a_1q^2$，即$2q^2-3q-2=0$，$(2q+1)(q-2)=0$.

解得$q=-\frac{1}{2}$(舍)，$q=2$，$\therefore S_4=\frac{1-2^4}{1-2}=15$.故选 C

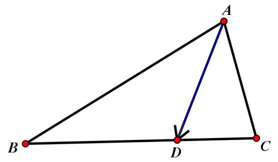
6.　答案　D

解析　$\because$函数$f(x)$为R上的增函数，$\therefore\begin{cases}4a-1>0\\0<a<1\end{cases}$且$4a-2\leq 1$，解得$\frac{1}{4}<a\leq\frac{3}{4}$，故选 D.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

7. 答案　B

解析　$\triangle ABC$ 中 $AB=2AC$，$\angle BAC$ 的平分线交边 AB 于点 D，则$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=2$，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，即$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.故选 B．



8.　答案　C

解析

由已知可得：$x^2f'(x)+2xf(x)=\ln x$,

令$g(x)=x^2f(x)$,则$g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=\ln x$,

且$f(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, $f'(x)=\frac{xg'(x)-2g(x)}{x^3}=\frac{x\ln x-2g(x)}{x^3}$,

再令$h(x)=x\ln x-2g(x)$,则$h'(x)=1+\ln x-2g'(x)=1-\ln x$,

$\therefore$ 当$x\in(0,e)$时，$h'(x)>0$, $h(x)$为增函数；当$x\in(e,+\infty)$时，$h'(x)<0$, $h(x)$为减函数；

$\therefore h(x)\le h(e)=e-2g(e)=e-2e^2f(e)=0$

$\therefore f'(x)\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立；$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数；

又因为$\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}$, $\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}=\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}$

故令$\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$, $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当$x\in(0,e)$时，$\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$为增函数；

$\therefore \frac{1}{e}>\ln\sqrt{2}>\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}$

$\therefore a<c<b$

9．　答案 AC

解析　由图可知 $A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

将点$\left(\frac{\pi}{12},2\right)$代入得：$2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

对于 A，因为 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故 A 正确；

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

对于 B，因为 $f(-\frac{\pi}{6})=2\sin(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=0$ ，，故 B 不正确；

对于 C，因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$ ，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减，故 C 正确；

对于 D，将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，

可得函数 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ ，不关于 y 轴对称，故 D 错误.

10.答案　ABD

解析　AB 项.当 d=0 时不成立。C 项当 $a_1>0$，$q>1$ 则 $\{a_n\}$ 为单调递增数列。当 $\{a_n\}$ 为单调递增数列时也可能 $a_1<0$，$-1<q<0$

D 项当 q=-1 时不成立.

11.答案　ACD

解析　当 m=1 时 ,$a^2+b^2-ab=9$,$a^2+b^2=9+ab\leq 9+\frac{a^2+b^2}{2}$,$a^2+b^2\leq 18$,当且仅当 a=b 时等号成立 ,a^2+b^2 有最大值，最大值为 18，选项 A 正确；

当 m=3 时，$a^2+b^2-3ab=9$，设 ab=k(k>0),则 $a^2+b^2-3ab=9$ 化为 $a^2+\frac{k^2}{a^2}-3k=9$, $a^4+(9+3k)a^2+k^2=0$,

因为 $\Delta=(9+3k)^2-4k^2=81+54k+5k^2>0$,所以方程 $a^4+(9+3k)a^2+k^2=0$ 有解,所以 ab 没有最大值 ,选项 B 错误；

当 m=1 时，$a^2+b^2-ab=9$，　$(a+b)^2=9+3ab\leq 9+\frac{3}{4}(a+b)^2$, $(a+b)^2\leq 36$,$-6\leq a+b\leq 6$, 当且仅当 a=b=3 时 a+b=6，a=b=−3 时 a+b=−6，a+b 有最小值，最小值为−6，选项 C 正确；

当 m=3 时，$a^2+b^2-3ab=9$，$a^2+b^2=9+3ab\geq 9+3(-\frac{a^2+b^2}{2})$, $a^2+b^2\geq\frac{18}{5}$，当且仅当 a=−b 时等号成立，a^2+b^2 有最小值，最大值为 $\frac{18}{5}$，选项 D 正确.故选 ACD.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

12.答案　BD

解析

对于函数$g(x)=\frac{(x-1)^2}{e^x}$，$g'(x)=\frac{-x^2+4x-3}{e^x}=-\frac{(x-1)(x-3)}{e^x}$，当$x\in(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数；当$x\in(1,3)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数；$\therefore$ 值域为$[0,+\infty]$，选项A错；

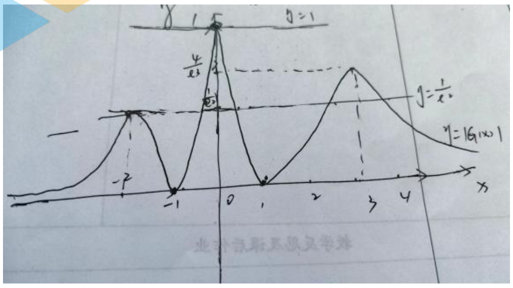
由已知$F(x)=e^x-\ln x-2$，$F'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，显然在$(0,+\infty)$上为增函数，且$F'(1)=e-1>0$，

$F'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使$F'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，当$x\in(0,x_0)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，$\therefore F(x)\ge F(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2>0$，

选项B正确；

C：方程$e^2\cdot[G(x)]^2-(e^2+1)|G(x)|+1=0$的两根为$|G(x)|=1$或$|G(x)|=\frac{1}{e^2}$，而函数$|G(x)|$的图象如下



由图象可知选项C项错误；

不等式$g(x)-ax+a=\frac{(x-1)^2}{e^x}-a(x-1)<0$，当$x<1$时，不等式可化为$\frac{x-1}{e^x}-a>0$，

令$h(x)=\frac{x-1}{e^x}-a$，则$h'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，当$x<1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-\infty,1)$上为增函数，则$h(x)>0$

在$(-\infty,1)$上的3个整数解为$-2,-1,0$，$\therefore \begin{cases}h(-2)>0\\h(-3)\le 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{-3}{e^{-2}}-a>0\\ \frac{-4}{e^{-3}}-a\le 0\end{cases}$ 解得$-4e^3\le a<-3e^2$，故选项D正确。

13.　答案　3x+y+2=0

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

解析

对$f(x)$求导可得，$f'(x)=2x+2f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x}$,则$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+2f'\left(\frac{1}{2}\right)+2$，解得$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-3$

$\therefore f(x)=x^2-6x+\ln x \therefore f(1)=-5; f'(x)=2x-6+\frac{1}{x}, f'(1)=-3$

$\therefore$ 切线方程为$y+5=-3(x-1)$,整理得$3x+y+2=0$

14. 答案 **-2**

解析 $\because f(x+1)$是偶函数，$f(x)$是奇函数，$\therefore f(x)$以$\mathbf{x=1}$为对称轴，以$(\mathbf{2,0})$为对称中心，$\therefore \mathbf{T=4}$，$f(2023)=f(3)=-f(1)=-2$

15.答案 $\sqrt{6}$.

解析 $\cos^2 C-\cos^2 B+\sin^2 A=\sin A\sin B$ ，

$\therefore 1-\sin^2 C-(1-\sin^2 B)+\sin^2 A=\sin A\sin B$ ，

即$\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 C=\sin A\sin B$ ，

由正弦定理角化边得$b^2+a^2-c^2=ab$ ，

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2},\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ，

$\therefore \frac{ab}{\sin A\sin B}=\frac{c^2}{\sin^2 C}$即$\frac{ab}{\frac{1}{2}}=\frac{c^2}{\sin^2\frac{\pi}{3}}$ ，化简得$c^2=\frac{3}{2}ab$ ，

又$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}\ \therefore ab=4 \therefore c^2=6$解得$c=\sqrt{6}$.

16、答案 3/2

解析 设$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$,则$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{a}$,$\because AM\perp BN$ ，$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$，

$\therefore \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\frac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$，

化简得$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\frac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$，$\mathbf{b}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{a}^2=0,|\mathbf{b}|^2-\frac{1}{6}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|-2|\mathbf{a}|^2=0,$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|^2}-\frac{1}{6}\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}-\mathbf{2}=0$, $\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}=-\frac{4}{3}$(舍)，$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{3}{2}$.

17.

解：(1)（法一）由题意，结合余弦定理得，$\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}+\frac{b^2+a^2-c^2}{2abc}=\frac{1}{a}$，………………2 分

所以 $bc=a^2=8$ ………………………………………………4 分

（法二）由题意，结合正弦定理得 $\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{1}{\sin A}$，………………2 分

即 $\frac{\sin C\cos B+\sin B\cos C}{\sin B\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{1}{\sin A}$，

$\sin^2 A=\sin B\sin C$,

$\therefore bc=a^2=8$ ………………………………………………4 分

(2)由于 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=4\sin A=\sqrt{7}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ………………………………5 分

又 $\because c>a>b\therefore A$ 为锐角，即 $\cos A=\frac{3}{4}$ ……………………………6 分

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-3bc}{2bc}=\frac{(b+c)^2-24}{16}=\frac{3}{4}$，

$\therefore b+c=6$，……………………………8 分

又 $b\cdot c=8, c>a>b$，$\therefore b=2, c=4$ ……………………………10 分

18.

解：(1) 方法 1 $\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)}{n}$

$\therefore$当 n ≥ 2，$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$…………2 分

$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}$……….3 分

又 n=1 也适合上式，……….4 分

$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}$（$n\in\mathrm{N}^*$）…………5 分

方法 2：$\because \frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n}{n}$……….2 分

$\therefore \{\frac{a_n}{n}\}$为公比为 2 首项为 1 的等比数列…………3 分

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\therefore \frac{a_n}{n}=2^{n-1}$.........4 分

$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}$..........5 分

（2）由（1）知，

$S_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$①......6 分

$2S_n=\quad 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$ ②......7 分

①-②，$-S_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$ ......8 分

$=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n$

$=2^n-1-n\cdot 2^n$ ......10 分

$\therefore S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$ ......12 分

【说明】(1)第一问方法 1 不验证 n=1 扣 1 分

方法 2 有 4 分点，不看 3 分点；

(2)第二问错位相减法按步骤给分；

19. 【详解】（1） $f(x)=x^3+2x^2-ax+2$， $f'(x)=3x^2+4x-a$， ················1 分

因为函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=3x^2+4x-a\geq 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立， ································ 2 分

即 $a\leq\left(3x^2+4x\right)_{\min}$， ·· 3 分

$y=3x^2+4x$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x=1$ 时，$\left(3x^2+4x\right)_{\min}=7$， ··· 4 分

所以 a 的取值范围 $(-\infty,7]$. ·· 5 分

（2） $f(x)=x^3+2x^2-ax+2$ 与 $y=a(1-x)$ 有且只有一个交点，

即 $x^3+2x^2-ax+2=a(1-x)$ 只有一个根， ·· 6 分

$x^3+2x^2+2=a$ 只有一个根，

令 $h(x)=x^3+2x^2+2$，所以 $h(x)$ 的图象与 $y=a$ 的图象只有一个交点，·······7 分

$h'(x)=3x^2+4x$，令 $h'(x)>0$，解得 $x<-\frac{4}{3}$ 或 $x>0$，

令 $h'(x)<0$，解得 $-\dfrac{4}{3}<x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，$\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ 上单调递减，……… 9 分

所以 $h(x)_{极大值}=h\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{86}{27},h(x)_{极小值}=h(0)=2$，…………………………… 10 分

又因为 $h(x)$ 的图象与 $y=a$ 的图象只有一个交点，

所以 $a\in(-\infty,2)\cup(\dfrac{86}{27},\infty)$.…………………………………………………………… 12 分

【说明】（1）有 3 分点，不看 2 分点，有 5 分点，不看 4 分点，第一问不分参求解对应得分；

（2）第二问有 7 分点，不看 6 分点；

（3）a 的取值范围求对一半扣 1 分.

20.

解：因为 $\vec{m}\parallel\vec{n}$，故 $b\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+A\right)=a\cos\dfrac{A+C}{2}$，

由正弦定理得，$\sin B\sin A=\sin A\cos\dfrac{A+C}{2}$．…………………………1 分

又 $\sin A\neq 0$，则 $\sin B=\cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{\pi-B}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$，…………………………2 分

即 $2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$，而 $\sin\dfrac{B}{2}\neq 0$，故 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，故 $B=\dfrac{2\pi}{3}$．………………3 分

（Ⅰ）由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $7a^2=a^2+16-2a\times 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，整理得

$3a^2-2a-8=0$，…………………………4 分

解得 $a=2$ 或 $-\dfrac{4}{3}$（舍去），$b=2\sqrt{7}$，故 $\triangle ABC$ 的周长为 $6+2\sqrt{7}$．…………5 分

（Ⅱ）设 $\angle BCM=\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\angle BMC=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$.

由正弦定理得，$\dfrac{BM}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin\angle BMC}=\dfrac{CM}{\sin B}$ 即 $\dfrac{\frac{2c}{3}}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$，…………6 分

故$c=3\sqrt{2}\sin\alpha$，$a=-\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha$，

所以$a+c=2\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha=\sqrt{14}\sin(\alpha+\varphi)$，……………………………7 分

其中$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7},\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{7}}{7},\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$，……………8 分

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3},\therefore \varphi<\alpha+\varphi<\dfrac{\pi}{3}+\varphi,$

又$\because \dfrac{\pi}{6}<\varphi<\dfrac{\pi}{4},\therefore \varphi+\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{\pi}{2},$则当$\alpha+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，$a+c$取得最大值$\sqrt{14}$，…9 分

又$\because \sin(\varphi+\dfrac{\pi}{3})=\sin\varphi\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\varphi\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$………10 分

$\therefore \sin(\varphi+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}>\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$…………………………11 分

所以$a+c$的取值范围为$\left(\sqrt{6},\sqrt{14}\right]$…………………………12 分

21、

解：(1)$\because (a_n,a_{n+1})$在函数$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$上.

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，……………1 分

又$b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$，$\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{\frac{a_n^2+2a_n+1}{2a_n}}{\frac{a_n^2-2a_n+1}{2a_n}}=\left(\frac{a_n+1}{a_n-1}\right)^2$

$\therefore b_{n+1}=b_n^2$，……………3 分

两边取以 3 为底的对数，

$\log_3 b_{n+1}=2\log_3 b_n$…………4 分

又$b_1=\frac{a_1+1}{a_1-1}=3$，$\log_3 b_1=1$

$\therefore \{\log_3 b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列……….5 分

$\therefore \log_3 b_n=2^{n-1}$.　$\therefore b_n=3^{2^{n-1}}$……………6 分

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

（2）$\because b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$, $\therefore a_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}=\frac{3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}$. ....7 分

$\therefore C_n=a_n-1=\frac{3^{2^{n-1}}+1-3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}=\frac{2}{3^{2^{n-1}}-1}$.................8 分

则$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{3^{2^{n-1}}-1}{3^{2^n}-1}=\frac{3^{2^{n-1}}-1}{\left(3^{2^{n-1}}\right)^2-1}=\frac{1}{3^{2^{n-1}}+1}<\frac{1}{3^{2^{n-1}}}<\frac{1}{3}$

$\therefore c_{n+1}<\frac{1}{3}c_n$，..................10 分　又$c_1=1$.

$S_n=C_1+C_2+\cdots+C_n<C_1+\frac{1}{3}C_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2C_1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}C_1$

$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]<\frac{3}{2}$.........12 分

【说明】（1）第一问不求 $\log_3 b_1=1$，不说明首项公比只下定义说$\{\log_3 b_n\}$是等比数列不扣分

（2）第二问 8 分点之后的证明$c_{n+1}<\frac{1}{3}c_n$其他方法酌情给分

22.【详解】（1）$f'(x)=ax+(1+2a)+\frac{2}{x}=\frac{ax^2+(1+2a)x+2}{x}=\frac{(ax+1)(x+2)}{x}$，定义域为$(0,+\infty)$　1 分

当$a\ge 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；…………………………………… 2 分

当$a<0$时，$x\in(0,-\frac{1}{a})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,-\frac{1}{a})$上单调递增，

$x\in(-\frac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减；……………………3 分

综上，当$a\ge 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，$f(x)$在$(0,-\frac{1}{a})$上单调递增，在$(-\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减.…………… 4 分

（2）方程$f(x)=e^{-ax}+\frac{1}{2}ax^2$即$(1+2a)x+2\ln x=e^{-ax}$，即$x+2\ln x=-2ax+e^{-ax}$，

即$e^{\ln x}+2\ln x=e^{-ax}+2(-ax)$，

令$g(x)=e^x+2x$，则$g(\ln x)=g(-ax)$………………………………………………………… 5 分

因为$g'(x)=e^x+2>0$，所以$g(x)=e^x+2x$在 R 上单调递增，

所以$\ln x=-ax$，即$a=-\frac{\ln x}{x}$，所以$a=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$………………………………………… 6 分

因为x_1,x_2是方程$f(x)=e^{-ax}+\frac{1}{2}ax^2$的两个实根，所以$x_1,x_2$是方程$a=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$的两个实根，

即$a=\frac{1}{x_1}\cdot\ln\frac{1}{x_1},a=\frac{1}{x_2}\cdot\ln\frac{1}{x_2}$，所以$\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}$是方程$a=x\cdot\ln x$的两个实根.………… 7 分

令$h(x)=x\cdot\ln x$，则$h'(x)=\ln x+1$

当$x\in(0,\frac{1}{e})$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

$h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e},h(1)=0$，当$x\to 0$时，$f(x)\to 0$……………………………………… 8 分

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

令 $m=\dfrac{1}{x_1},n=\dfrac{1}{x_2}$，不妨设 $m<n$，则 $0<m<\dfrac{1}{e}<n<1$，

要证 $2x_1\cdot x_2<e(x_1+x_2)$，即证 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{e}$，即证 $m+n>\dfrac{2}{e}$ ……………………… 9 分

令 $\varphi(x)=h(x)-h(\dfrac{2}{e}-x)$，则 $\varphi'(x)=h'(x)+h'(\dfrac{2}{e}-x)=\ln x+\ln(\dfrac{2}{e}-x)+2$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单调递增，且 $\varphi'(\dfrac{1}{e})=0$，

所以 $\varphi'(x)<\varphi'(\dfrac{1}{e})=0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单调递减，又 $\varphi(\dfrac{1}{e})=0$

所以 $\varphi(m)>\varphi(\dfrac{1}{e})=0$，即 $h(n)=h(m)>h(\dfrac{2}{e}-m)$， ………………………………… 11 分

因为 $h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 单调递增，所以 $n>\dfrac{2}{e}-m$，即 $m+n>\dfrac{2}{e}$

所以 $2x_1\cdot x_2<e(x_1+x_2)$ ………………………………………………………………………… 12 分

【说明】（1）第二问有其他方法证明的对应得分。若直接用对数平均值不等式证明，但未证明对数平均值不等式的，此处扣 1 分；

（2）第二问评分标准把握：同构 1 分，构造函数 2 分，单调性 1 分，证明的变形 1 分，证明 3 分。

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！