2024 北京大峪中学高二（下）开学考

数　学

（满分：150 分 时间：120 分钟 命题人：高二数学集备组）

一、选择题（本大题共 10 小题，每题 4 分）

1. 已知直线 l 经过 $A(-1,0)$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$ 两点，则直线 l 的倾斜角为（　）

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $150°$

2. 两条直线 $l_1: x-2y-4=0$ 与 $l_2: x-2y+1=0$ 之间的距离是（　）

A. 5　　B. 1　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

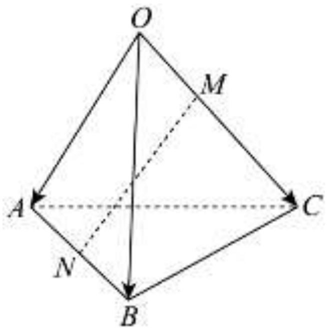
3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A. 1　　B. 5　　C. 10　　D. 20

4. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{m-3}+\dfrac{y^2}{7-m}=1$ 的焦点在 x 轴上，则 m 的取值范围是（　）

A. $3<m<7$　　B. $3<m<5$　　C. $5<m<7$　　D. $m>3$

5. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.点 M 在 OC 上，且 $OM=\dfrac{1}{2}MC$，N 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　）



A. $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　　B. $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

C. $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　　D. $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$

6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在椭圆 C 上.若 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为（　）

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 9

7. 已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$．若直线 $y=kx-2$ 上存在点 P，使得 $\angle APB=90°$，则实数 k 的取值范围是

（ ）

A. $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$　　B. $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

C. $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　　D. $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

8. 已知点 P 在由直线 $y=x+3$， $y=5$ 和 $x=-1$ 所围成的区域内（含边界）运动，点 Q 在 x 轴上运动.设点 $T(4,1)$，则 $|QP|+|QT|$ 的最小值为（ ）

A. $\sqrt{30}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{34}$　　D. $2\sqrt{10}$

9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 A_1D_1 的中点， F 为棱 AA_1 上一动点.给出下列四个结论：

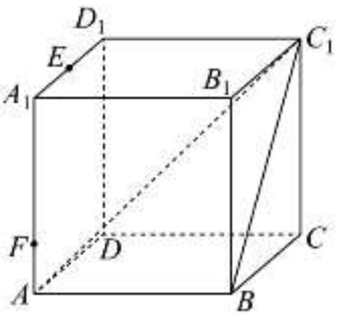
①存在点 F ，使得 EF // 平面 ABC_1；

②直线 EF 与 BC_1 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{2}$；

③点 A_1 到平面 ABC_1 的距离为 $\sqrt{2}$；

④点 A_1 到直线 AC_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

其中所有正确结论的个数为（ ）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 已知双曲线 Q 与椭圆 $E:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$ 有公共焦点，且左、右焦点分别为 F_1， F_2，这两条曲线在第一象限的交点为 P， $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，则双曲线 Q 的标准方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$

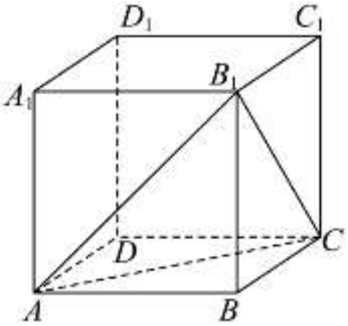
C. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $y^2-\frac{x^2}{3}=1$

二、填空题（本大题共 5 小题，每题 5 分）

11. 若直线 $2x+(1-a)y+a=0$ 与直线 $ax+y+2=0$ 垂直，则 a 的值为___.

12. 已知圆 $C_1:x^2+(y-1)^2=1, C_2:(x-\sqrt{3})^2+y^2=r^2(r>0)$. 则圆 C_1 的圆心坐标为___；若圆 C_1 与圆 C_2 内切，则 $r=$___.

13. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB_1 与直线 D_1C_1 所成角的大小为___；平面 $ABCD$ 与平面 ACB_1 夹角的余弦值为___.



14. 已知直线 $l_1:3x-y+1=0,\ l_2:x+y-5=0,\ l_3:x-ay-3=0$，则 l_1 与 l_2 的交点坐标为____________；若直线 l_1,l_2,l_3 不能围成三角形，写出一个符合要求的实数 a 的值______________.

15. 已知曲线 $W_1:x^2+y^2=m$，$W_2:x^4+y^2=m\left(m>0\right)$，给出下列四个命题：

①曲线 W_1 关于 x 轴、y 轴和原点对称；

②当 $m=1$ 时，曲线 W_1，W_2 共有四个交点；

③当 $m=2$ 时，曲线 W_2 围成的区域内（含边界）两点之间的距离的最大值是 3；

④当 $0<m<1$ 时，曲线 W_1 围成的区域面积大于曲线 W_2 围成的区域面积.

其中所有真命题的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,3),\ B(3,1),\ C(-1,0)$.

（1）设线段 AB 的中点为 M，求中线 CM 所在直线的方程；

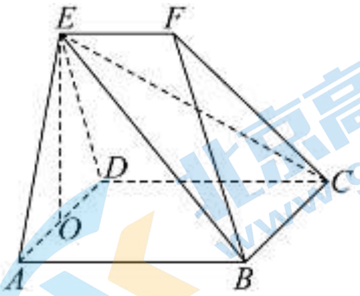
（2）求 AB 边上的高线的长.

17. 已知直线 $l:y=-x+2$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A,B 两点.

（1）写出抛物线 C 的焦点坐标和准线方程；

（2）求弦长 $|AB|$.

18. 如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ADE$ 是等边三角形，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$EF//AB$，$EF=1,\ AB=2$，O 是 AD 的中点.



（1）求证：$EO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求直线 AB 与平面 BCF 所成角的大小；

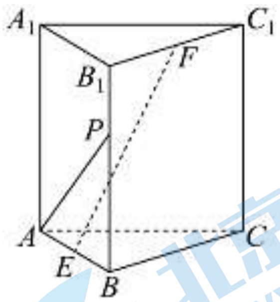
（3）求三棱锥 $E-BCF$ 的体积.

19. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个焦点为 $(2,0)$，一个顶点为 $(0,\sqrt{2})$.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率；

（2）已知直线 l 与椭圆 C 相切于点 M，直线 l 交 y 轴于点 N，O 为坐标原点，$|OM|=|ON|$，求 $\triangle OMN$ 的面积.

20. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90^\circ, AB=BC=BB_1=2, E, F$ 分别为 AB, B_1C_1 的中点.



（1）求证：EF // 平面 ACC_1A_1；

（2）若点 P 是棱 BB_1 上一点，且直线 AP 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{5}$，求线段 BP 的长.

21. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，左、右顶点分别为 A, B，

$|AF|=2+\sqrt{3}, |BF|=2-\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 O 是坐标原点，M, N 是椭圆 C 上不同的两点，且关于 x 轴对称，E, G 分别为线段 OM, MB 的中点，直线 AE 与椭圆 C 交于另一点 D.证明：D, G, N 三点共线.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每题 4 分）

1. 【答案】B

【分析】根据题意，求得直线l的斜率为$k=\sqrt{3}$，进而求得直线的倾斜角，得到答案.

【详解】由直线l经过$A(-1,0)$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$两点，可得直线l的斜率为$k=\dfrac{\sqrt{3}-0}{0-(-1)}=\sqrt{3}$，

设直线l的倾斜角为$\alpha(0^{\circ}\le\alpha<180^{\circ})$，可得$\tan\alpha=\sqrt{3}$，所以$\alpha=60^{\circ}$.

故选：B.

2. 【答案】C

【分析】依题意代入两平行线之间的距离公式即可得出结果.

【详解】由两平行线之间的距离公式可得$d=\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$.

故选：C

3. 【答案】C

【分析】由二项展开式的通项计算即可得.

【详解】二项展开式的通项为$T_{k+1}=\mathrm{C}_5^k x^{5-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=\mathrm{C}_5^k x^{5-2k}$，

令$5-2k=1$，即$k=2$，有$T_3=\mathrm{C}_5^2 x^{5-2}=10x$，

故x的系数为 10.

故选：C.

4. 【答案】C

【分析】根据椭圆的标准方程，列出不等式组，即可求解.

【详解】由椭圆$\dfrac{x^2}{m-3}+\dfrac{y^2}{7-m}=1$的焦点在$x$轴上，则满足$\begin{cases}m-3>0\\7-m>0\\m-3>7-m\end{cases}$，解得$5<m<7$.

故选：C.

5. 【答案】D

【分析】利用空间向量的线性运算及空间向量基本定理，结合图像即可得解.

【详解】由题意可知，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$.

故选：D.

6. 【答案】B

【分析】根据题意，由椭圆的定义，得到$|PF_1|+|PF_2|=6$，再由勾股定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=20$，联立方程组，求得$|PF_1||PF_2|=8$，结合三角形的面积公式，即可求解.

【详解】如图所示，椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，可得$a=3,b=2$，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$，

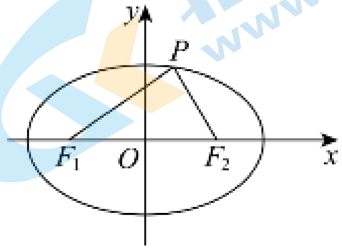
因为点P在椭圆C上，可得$|PF_1|+|PF_2|=6$，

又由$\angle F_1PF_2=90°$，可得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=(2\sqrt{5})^2=20$，

联立方程组$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=6\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=20\end{cases}$，可得$|PF_1||PF_2|=8$，

所以$\triangle F_1PF_2$的面积为$S=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=4$.

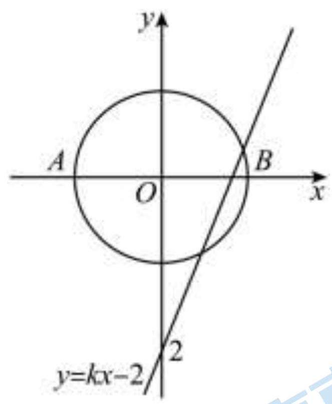
故选：B.



7. 【答案】D

【分析】将问题化为直线$y=kx-2$与圆$x^2+y^2=1$有交点，注意直线所过定点$(0,-2)$与圆的位置关系，再应用点线距离公式列不等式求k的范围.

【详解】由题设，问题等价于过定点$(0,-2)$的直线$y=kx-2$与圆$x^2+y^2=1$有交点，



又$(0,-2)$在圆外，所以只需$\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\le 1$，可得$k\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$.

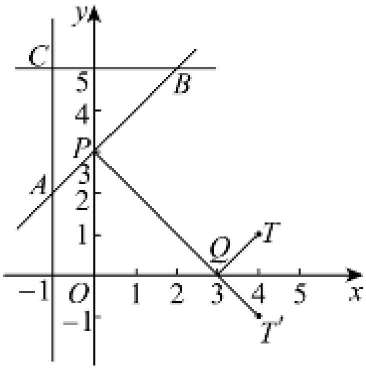
故选：D

8. 【答案】B

【分析】根据题意画出图形，再确定出使$|QP|+|QT|$的位置.然后求出值即可

【详解】由直线 $y=x+3$，$y=5$ 和 $x=-1$ 围成 $\triangle ABC$，如图所示，

点 P 在 $\triangle ABC$ 内（含边界）运动，



Q 在 x 轴上运动，作点 $T(4,1)$ 关于 x 轴的对称点 $T'(4,-1)$，则 $|QP|+|QT|=|QP|+|QT'|$，

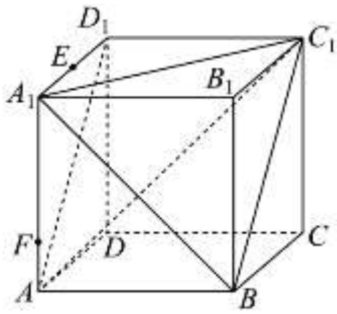
$|QP|+|QT|$ 的最小值为 $T'(4,-1)$ 到直线 $y=x+3$ 的距离，即 $\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

故选：B.

9. 【答案】C

【分析】由线面平行的判定定理验证选项 A；几何法处理异面直线所成的角验证选项 B；等体积法求点到平面的距离验证选项 C；等面积法求点到直线的距离验证选项 D.

【详解】连接 D_1A, A_1B, A_1C_1，如图所示



正方体中有 $AB // D_1C_1$，$AB=D_1C_1$，则四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，有 $D_1A // C_1B$，

E 为棱 A_1D_1 的中点，当 F 为棱 AA_1 的中点时，有 $EF // D_1A$，则 $EF // C_1B$，

$EF \not\subset$ 平面 ABC_1，$C_1B \subset$ 平面 ABC_1，所以此时 $EF //$ 平面 ABC_1，结论①正确；

直线 EF 与 BC_1 所成角，即直线 EF 与 AD_1 所成的角，由图形可知，直线 EF 与 AD_1 不可能垂直，结论②错误；

正方体中 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$AA_1 \perp A_1C_1$，$A_1C_1=2\sqrt{2}$，

同理，$AB \perp BC_1$，$BC_1=2\sqrt{2}$，$AC_1=2\sqrt{3}$

设点 A_1 到平面 ABC_1 的距离为 d，由 $V_{A_1-ABC_1}=V_{C_1-ABA_1}$，有 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC_1}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABA_1}\cdot C_1B_1$，

即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC_1\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot AA\cdot C_1B_1$，解得 $d=\sqrt{2}$，结论③正确；

设点 A_1 到直线 AC_1 的距离为 d'，$\mathrm{Rt}\triangle AA_1C_1$ 中，$AA_1\cdot A_1C_1=AC_1\cdot d'\Rightarrow 2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{3}\times d'$，解得 $d'=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，结论④正确.

正确结论有 3 个.

故选：C

10. 【答案】C

【分析】根据椭圆的和双曲线的定义结合焦点三角形的性质求解即可.

【详解】设双曲线 Q 的方程为 $Q:\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$，

在椭圆 $E:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$ 中 $a^2=25,b^2=21,c^2=a^2-b^2=4$，

则 $a=5,c=2$，因为 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，

所以 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c=4$，由椭圆的定义可知，$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

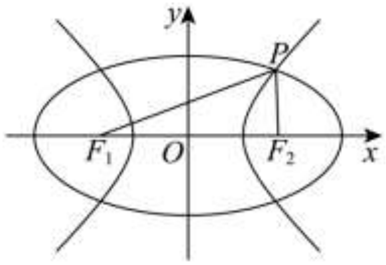
所以 $|PF_1|=6$，再由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a_1=6-4=2$，

所以 $a_1=1$，因为双曲线 Q 与椭圆 $E:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$ 有公共焦点，

所以 $c_1=2,b_1=\sqrt{c_1^2-a_1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

故双曲线 Q 的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

故选：C.



二、填空题（本大题共 5 小题，每题 5 分）

11. 【答案】-1

【分析】由两直线垂直的条件求解.

【详解】结合题意：由两直线垂直可得：$2a+(1-a)\times1=0,$ 解得：$a=-1$.

故答案为：-1.

12. 【答案】 ①. $(0,1)$ ②. 3

【分析】第一空：由圆标准方程即可得出圆心坐标.第二空：由几何关系表示出内切即可.

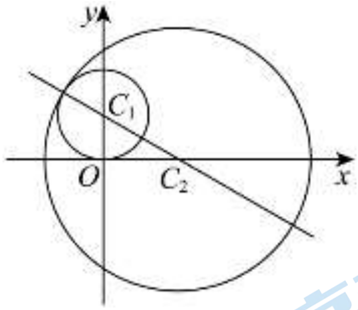
【详解】 $x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow$ 圆心为 $(0,1)$，半径 $r_1=1$；

$(x-\sqrt{3})^2+y^2=r^2 \Rightarrow$ 圆心为$\left(\sqrt{3},0\right)$，半径r；

设两圆的圆心距为d，则$d=\sqrt{\left(0-\sqrt{3}\right)^2+\left(1-0\right)^2}=2$

由几何关系知两圆内切$\Rightarrow r=d+r_1=2+1=3$.

故答案为：$\left(0,1\right)$；3.



13. 【答案】 ①. $45°$##$\frac{\pi}{4}$ ②. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】根据线线角、面面角等知识求得正确答案.

【详解】由于$AB//D_1C_1$，所以$\angle B_1AB$是异面直线AB_1与直线D_1C_1所成角或其补角，

而四边形ABB_1A_1是正方形，所以$\angle B_1AB=45°$.

连接BD交AC于O，则$AC\perp BD$，连接OB_1，

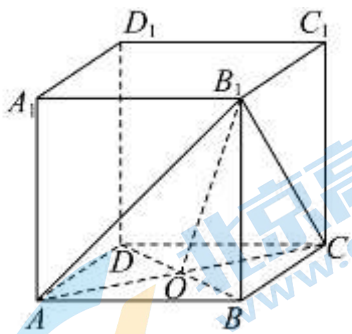
由于$AB_1=B_1C$，O是AC的中点，所以$OB_1\perp AC$，

所以$\angle B_1OB$是平面$ABCD$与平面ACB_1夹角，

设正方体的边长为2，则$BB_1=2, OB=\sqrt{2}, OB_1=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}$，

所以在直角三角形OBB_1中，$\cos\angle B_1OB=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$45°$；$\frac{\sqrt{3}}{3}$



14. 【答案】 ①. $(1,4)$ ②. 答案不唯一（只需写出$-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$中的一个即可）

【分析】联立方程组解得交点坐标；列出直线 l_1, l_2, l_3 不能围成三角形的条件，分别解出 a 即可.

【详解】解方程组 $\begin{cases}3x-y+1=0\\x+y-5=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$，所以 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(1,4)$；

由 $x-ay-3=0$ 得，直线 l_3 恒过定点 $(3,0)$；若直线 l_1, l_2, l_3 不能围成三角形，

只需 l_3 经过 $(1,4)$，或 l_1 与 l_3 平行，或 l_2 与 l_3 平行.

当 l_3 经过 $(1,4)$ 时，图 1 所示，$1-4a-3=0$，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$；

当 l_1 与 l_3 平行时，图 2 所示，$-3a=-1$，$a=\dfrac{1}{3}$；

当 l_2 与 l_3 平行时，图 3 所示，$-a=1$，$\therefore a=-1$.

故答案为：$(1,4)$；-1 或 $-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{3}$（只需写出 $-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ 中的一个即可）.

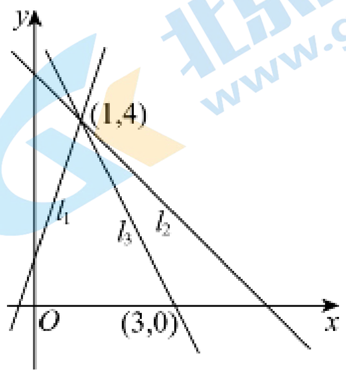


图 1

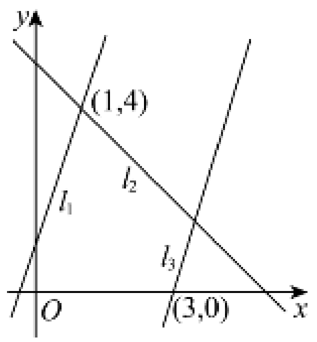


图 2

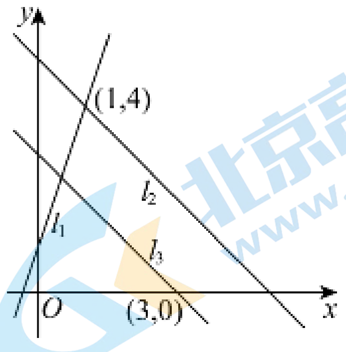


图 3

15. 【答案】①②③

【分析】分别将 $(x,-y)$、$(-x,y)$、$(-x,-y)$ 代入曲线方程验证，可判断①；解方程求出曲线的交点坐标可判断②；求出曲线 $W_2:x^4+y^2=2$ 上任一点 (x,y) 到原点的距离的表达式，结合二次函数性质，求得其最大值，结合曲线对称性，可判断③；比较曲线 W_1 和曲线 W_2 上任一点到原点距离的大小情况，结合对称性即可判断④.

【详解】对于①，设 (x,y) 在 $W_1:x^2+y^2=m$ 上，将 $(x,-y)$ 代入 $x^2+y^2=m$ 中，

得 $x^2+(-y)^2=x^2+y^2=m$，即点 $(x,-y)$ 在 $W_1:x^2+y^2=m$ 上，

同理将 $(-x,y)$ 代入 $x^2+y^2=m$ 中，得 $(-x)^2+y^2=x^2+y^2=m$，

即点 $(-x,y)$ 在 $W_1:x^2+y^2=m$ 上，

将 $(-x,-y)$ 代入 $x^2+y^2=m$ 中，得 $(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2=m$，

即点 $(-x,-y)$ 在 $W_1:x^2+y^2=m$ 上，

综合上述可知曲线 W_1 关于 x 轴、y 轴和原点对称，①正确；

对于②，当 $m=1$ 时，曲线 $W_1:x^2+y^2=1$，$W_2:x^4+y^2=1$，

联立可得 $W_1:x^4-x^2=0$，解得 $x=0$，或 $x=\pm1$，

当 $x=0$ 时，对于 $x^2+y^2=1$，$x^4+y^2=1$，均有 $y=\pm1$，即 W_1，W_2 有交点 $(0,1),(0,-1)$；

当 $x=\pm1$ 时，对于 $x^2+y^2=1$，$x^4+y^2=1$，均有 $y=0$，即 W_1，W_2 有交点 $(1,0),(-1,0)$，

故曲线 W_1，W_2 共有四个交点，②正确；

对于③，当 $m=2$ 时，$W_2:x^4+y^2=2$，则 $y^2=2-x^4$，

由 $y^2=2-x^4\ge0$，得 $0\le x^2\le\sqrt{2}$，

则曲线 $W_2:x^4+y^2=2$ 上任一点 (x,y) 到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$

当 $x^2=\frac{1}{2}$ 时，d 取到最大值 $\frac{3}{2}$，

结合曲线 $W_2:x^4+y^2=2$ 的对称性可知曲线 W_2 围成的区域内（含边界）两点之间的距离的最大值是 3，③正确；

对于④，当 $0<m<1$ 时，曲线 W_1 围成的区域面积为以原点为圆心，半径为 $\sqrt{m}$ 的圆的面积；

对于 $W_2:x^4+y^2=m$，则 $y^2=m-x^4$，

由 $y^2=m-x^4\ge0$，得 $0\le x^2\le\sqrt{m}$，

曲线 $W_2:x^4+y^2=m$ 上任一点 (x,y) 到原点的距离为 $d'=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+m}$，

由于$0<m<1$，$0\le x^2\le\sqrt{m}$，故$x^2=0$时，$-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+m$取最小值$m$，

即$d'\ge\sqrt{m}$恒成立，

由此可知曲线W_2围成的区域面积.大于曲线W_1围成的区域面积，④错误，

故答案为：①②③

【点睛】难点点睛：本题考查曲线的性质以及应用，解答的关键为③④的判断，解答时要求出曲线上任意一点到原点距离的表达式，确定变量范围，结合曲线的对称性以及二次函数性质，即可解答.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$2x-3y+2=0$

（2）$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【分析】（1）由中点坐标公式可得线段AB的中点为M的坐标，再根据点斜式即得中线CM所在直线的方程；

（2）由题意可得直线AB的斜率，由直线的点斜式可得方程$x+y-4=0$，然后由点C到直线AB的距离公式代入可求得AB边上的高线的长.

【小问 1 详解】

设M的坐标为(x_0,y_0)，则$x_0=\frac{1+3}{2}=2$，$y_0=\frac{3+1}{2}=2$，

即$M(2,2)$，所以$k_{MC}=\frac{2-0}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$，

则中线CM所在直线方程为$y=\frac{2}{3}(x+1)$，即 $2x-3y+2=0$.

【小问 2 详解】

由题意得 $k_{AB}=\frac{1-3}{3-1}=-1$.

则直线AB的方程为$y-3=-1(x-1)$，即$x+y-4=0$

$\triangle ABC$中，AB边上的高线的长就是点C到直线AB的距离 $h=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

17.【答案】（1）焦点坐标为$(2,0)$，准线方程为$x=-2$

（2）16

【分析】（1）根据抛物线的方程求出焦点坐标和准线方程即可；

（2）直线与抛物线方程联立，根据弦长公式求得弦长.

【小问 1 详解】

由抛物线C的方程可知$p=4$，抛物线开口向右，

所以抛物线C的焦点坐标为$(2,0)$，准线方程为$x=-2$.

【小问 2 详解】

将 $y=-x+2$ 代入 $y^2=8x$，整理得 $x^2-12x+4=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=12, x_1x_2=4$，

所以 $|AB|=\sqrt{2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{12^2-4\times4}=16$.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\pi}{3}$

（3）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】（1）利用面面垂直的性质定理来证明线面垂直；

（2）建立空间直角坐标系，然后利用向量发求线面角；

（3）先利用向量法求点到面的距离，然后利用体积公式求解棱锥体积.

【小问 1 详解】

因为 $\triangle ADE$ 是等边三角形，O 是 AD 的中点，

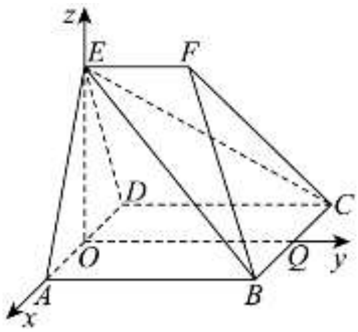
所以 $EO\perp AD$． $EO\subset$ 平面 ADE，

又平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$；

【小问 2 详解】

记 BC 的中点为 Q，易知 EO,OA,OQ 两两互相垂直，



以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $A(1,0,0),B(1,2,0),C(-1,2,0),E(0,0,\sqrt{3}),F(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0),\overrightarrow{BF}=(-1,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，

设平面 BCF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2x=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-x-y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$，此时 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$.

设直线 AB 与平面 BCF 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|0\times0+2\times\sqrt{3}+0\times1\right|}{2\times\sqrt{0+3+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以直线 AB 与平面 BCF 所成角为 $\frac{\pi}{3}$；

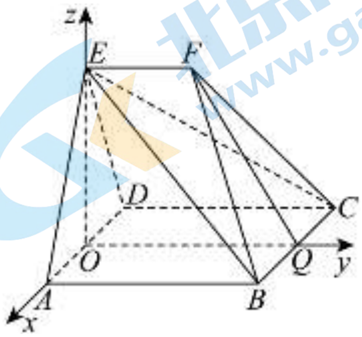
【小问 3 详解】

设点 E 到平面 BCF 的距离为 h，$\overrightarrow{EF}=(0,1,0)$，

则 $h=\frac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\left|\frac{0\times0+1\times\sqrt{3}+0\times1}{\sqrt{0+3+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由平面几何知识，易知在直角梯形 $EFQO$ 中 $QF=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

所以 $V_{E-BCF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCF}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BC\times FQ\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



19. 【答案】（1） $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ ； $\frac{\sqrt{6}}{3}$

（2） $\sqrt{3}$

【分析】（1）由焦点和顶点坐标得椭圆的方程及离心率；

（2）设直线方程为 $y=kx+m$，代入椭圆方程，得切点 M 的坐标，由 $|OM|=|ON|$ 得 $k^2=\frac{1}{3}$， $m^2=4$，

求 $\triangle OMN$ 的面积.

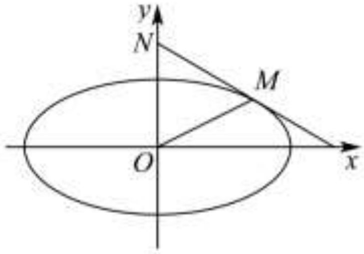
【小问 1 详解】

由题意可得 $c=2$， $b=\sqrt{2}$，所以 $a^2=b^2+c^2=6$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 2 详解】



易知直线l斜率存在，

设直线l的方程为$y=kx+m$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，

整理得$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$，

因为直线l与椭圆C有唯一交点M，所以$\Delta=(6km)^2-4(1+3k^2)(3m^2-6)=0$，

得$m^2-6k^2-2=0$，

设$M(x_0,y_0)$，则$2x_0=-\frac{6km}{1+3k^2}$，

所以$x_0=-\frac{3km}{1+3k^2}$，$y_0=kx_0+m=-\frac{3k^2m}{1+3k^2}+m=\frac{m}{1+3k^2}$，

因为$|OM|=|ON|$，所以$(-\frac{3km}{1+3k^2})^2+(\frac{m}{1+3k^2})^2=m^2$，

整理得$k^2=\frac{1}{3}$，所以$m^2=6k^2+2=4$，

所以$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|ON|\times|x_0|=\frac{1}{2}\times\left|\frac{3km^2}{1+3k^2}\right|=\frac{1}{2}\times\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times 4}{1+3\times\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$.

【点睛】关键点睛：由直线l交y轴于点N，考虑$\triangle OMN$面积表示为$\frac{1}{2}|ON|\times|x_0|$，再由直线与椭圆相切，可知方程$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$只有一个实数解，可得$2x_0=-\frac{6km}{1+3k^2}$，易得点$M$坐标.

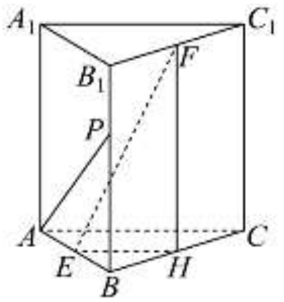
20. 【答案】（1）证明见解析

（2）1

【分析】（1）通过取BC的中点H构建平面$EHF//$平面ACC_1A_1即得；

（2）由题设易于建系，运用空间向量的夹角公式表示出直线AP与平面BEF所成角的正弦值，解方程即得.

【小问 1 详解】

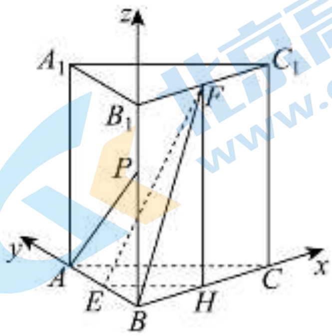


如图，取线段 BC 的中点 H，连接 FH, EH ,因 E, F 分别为 AB, B_1C_1 的中点, 故有 $EH // AC, FH // CC_1$,

又因为 $AC, CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1， $EH, FH \not\subset$ 平面 ACC_1A_1 ,故 $EH //$ 平面 ACC_1A_1， $FH //$ 平面 ACC_1A_1，

又 $EH \cap FH = H$,则平面 $EHF //$ 平面 ACC_1A_1 ,因 $EF \subset$ 平面 EHF， 则 $EF \parallel$ 平面 ACC_1A_1 .

【小问 2 详解】



如图，分别以 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB_1}$ 为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $B-xyz$.

则 $A(0,2,0), B(0,0,0), B_1(0,0,2), E(0,1,0), F(1,0,2)$,设点 $P(0,0,z), \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BB_1}$,则 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$， 代入坐标得：$(0,0,z) = \lambda(0,0,2)$， 即 $P(0,0,2\lambda)$，

于是 $\overrightarrow{AP} = (0,-2,2\lambda)$, $\overrightarrow{EB} = (0,-1,0), \overrightarrow{EF} = (1,-1,2)$,设平面 BEF 的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$， 则有

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = -b = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = a - b + 2c = 0 \end{cases}$$, 故可取 $\vec{n} = (-2,0,1)$，

依题意得， $|\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{AP} \rangle| = \left| \dfrac{2\lambda}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{\lambda^2+1}} \right| = \dfrac{1}{5}$， 解得： $\lambda = \dfrac{1}{2}$， 即线段 BP 的长为 1.

21. 【答案】（1） $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

（2）证明见解析

【分析】（1）由题意得 $|AF| = 2 + \sqrt{3} = a + c, |BF| = 2 - \sqrt{3} = a - c$， 结合平方关系即可得解.

（2）由题意不妨设 $M(m,n), N(m,-n), A(-2,0), B(2,0), O(0,0)$， 则 $E\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{n}{2}\right), G\left(\dfrac{m+2}{2}, \dfrac{n}{2}\right)$， 将

直线 AE 的方程 $y=\dfrac{\frac{n}{2}}{\frac{m}{2}+2}(x+2)$，与椭圆方程联立，结合韦达定理得点 D 坐标，要证 D,G,N 三点共线，只需证明 $k_{NG}=k_{ND}$ 即可，在化简时注意利用 $4n^2=4-m^2$，由此即可顺利得证.

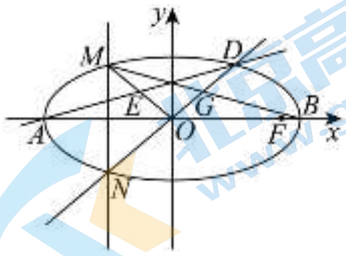
【小问 1 详解】

由题意 $|AF|=2+\sqrt{3}=a+c,|BF|=2-\sqrt{3}=a-c$，

所以 $a=2,c=\sqrt{3},b=\sqrt{4-3}=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】



由题意不妨设 $M(m,n),N(m,-n),A(-2,0),B(2,0),O(0,0)$，其中 $\dfrac{m^2}{4}+n^2=1,(m\neq\pm2)$，即

$4n^2=4-m^2$，

则 $E\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right),G\left(\dfrac{m+2}{2},\dfrac{n}{2}\right)$，且直线 AE 的方程为 $y=\dfrac{\frac{n}{2}}{\frac{m}{2}+2}(x+2)$，

将其与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=\dfrac{n}{m+4}(x+2)\end{cases}$，

消去 y 并化简整理得 $\left[1+\dfrac{4n^2}{(m+4)^2}\right]x^2+\dfrac{16n^2}{(m+4)^2}x+\dfrac{16n^2}{(m+4)^2}-4=0$，

由韦达定理有 $x_Ax_D=-2x_D=\dfrac{\dfrac{16n^2}{(m+4)^2}-4}{1+\dfrac{4n^2}{(m+4)^2}}=\dfrac{16n^2-4(m+4)^2}{4n^2+(m+4)^2}$，

所以 $x_D=\dfrac{-8n^2+2(m+4)^2}{4n^2+(m+4)^2}$， $y_D=\dfrac{n}{m+4}(x_D+2)=\dfrac{n}{m+4}\left[\dfrac{-8n^2+2(m+4)^2}{4n^2+(m+4)^2}+2\right]=\dfrac{4n(m+4)}{4n^2+(m+4)^2}$，

即点 $D\left(\dfrac{-8n^2+2(m+4)^2}{4n^2+(m+4)^2},\dfrac{4n(m+4)}{4n^2+(m+4)^2}\right)$,

而 $k_{NG}=\dfrac{\frac{3n}{2}}{1-\frac{m}{2}}=\dfrac{3n}{2-m}$, $k_{ND}=\dfrac{\dfrac{4n(m+4)}{4n^2+(m+4)^2}+n}{\dfrac{-8n^2+2(m+4)^2}{4n^2+(m+4)^2}-m}=\dfrac{4n(m+4)+n(m+4)^2+4n^3}{-8n^2+2(m+4)^2-m(m+4)^2-4n^2m}$

$=\dfrac{4n(m+4)+n(m+4)^2+4n(4-m^2)}{(2-m)(m+4)^2-(4-m^2)(2+m)}=\dfrac{12n(m+3)}{4(2-m)(m+3)}=\dfrac{3n}{2-m}=k_{NG}$,

所以 D,G,N 三点共线.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！