1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\frac{z}{\bar{z}-\mathrm{i}}=$

A. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　C. $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$　　D. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$

2.已知集合 $A=\{x|x^2-x-12<0\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x<5\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

3.命题“$\forall x>0,\cos x>-\frac{1}{2}x^2+1$”的否定是

A. $\forall x>0,\cos x\leqslant-\frac{1}{2}x^2+1$　　B. $\forall x\leqslant0,\cos x>-\frac{1}{2}x^2+1$

C. $\exists x_0>0,\cos x_0\leqslant-\frac{1}{2}x_0^2+1$　　D. $\exists x_0\leqslant0,\cos x_0\leqslant-\frac{1}{2}x_0^2+1$

4.$\sin 160^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\cos 50^\circ=$

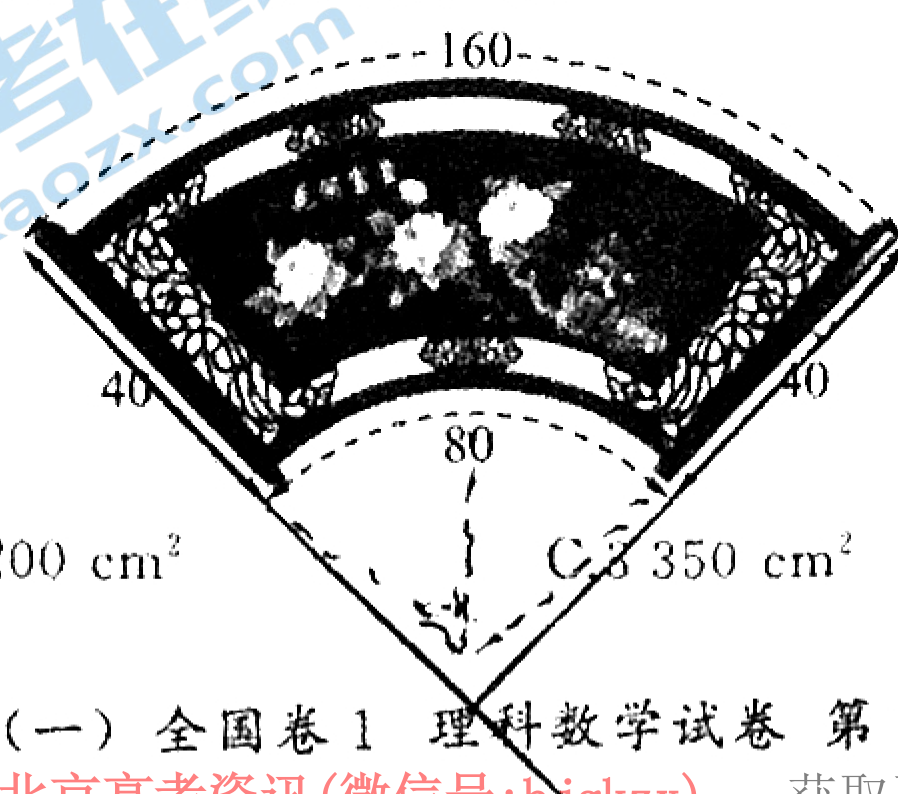
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.已知函数 $f(x)=x\ln x^2-x+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程为

A. $3x-y-2\mathrm{e}+1=0$　　B. $(\mathrm{e}-1)x+\mathrm{e}y-2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}=0$

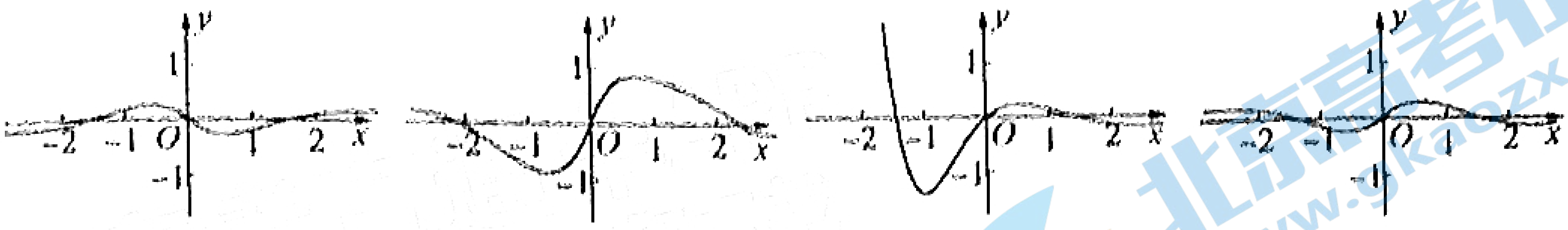
C. $(\mathrm{e}+1)x-\mathrm{e}y=0$　　D. $3x-y-3\mathrm{e}+1=0$

6.玉雕在我国历史悠久，拥有深厚的文化底蕴，数千年来始终以其独特的内涵与魅力深深吸引着世人.玉雕壁画是采用传统的手工雕刻工艺，加工生产成的玉雕工艺画.某扇形玉雕壁画尺寸(单位：cm)如图所示，则该壁画的扇面面积约为



A. $1\ 600\ \mathrm{cm}^2$　　B. $3\ 200\ \mathrm{cm}^2$　　C. $3\ 350\ \mathrm{cm}^2$　　D. $4\ 800\ \mathrm{cm}^2$

7.函数 $f(x)=\frac{x^2\cos x}{e^{|x|}}$ 的图象大致为



8.下列各命题中，p 是 q 的充分不必要条件的是

A.$p:\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{y}}$，$q:\ln x>\ln y$

B.已知 $a\in\mathbf{R}$，p：直线 $2x+ay+3=0$ 与直线 $ax+8y+6=0$ 平行，$q:a=4$ 或 -4

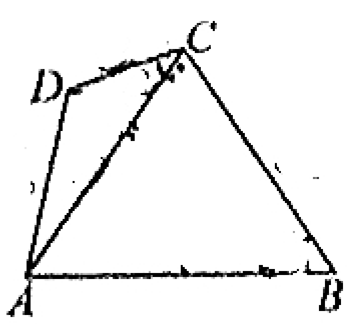
C.已知 $a\in\mathbf{R}$，$p:-2<a<4$，$q:f(x)=2x^2-2ax+a+4$ 有两个零点

D.已知 $a>0,b>0$，$p:a+b\geq 6$，$q:a\geq 3$ 且 $b\geq 3$

9.已知点 A 是函数 $f(x)=x^2-\ln x+2$ 图象上的点，点 B 是直线 $y=x$ 上的点，则 $|AB|$ 的最小值为

A.$\sqrt{2}$　　B.2　　C.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{16}{3}$

10.如图，设△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $b^2=ac$，$B=\frac{\pi}{3}$，D 是△ABC 外一点，$AD=3$，$CD=2$，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值是



A.$\frac{13\sqrt{3}}{2}+6$　　B.$\frac{13\sqrt{3}}{4}+6$

C.$\frac{13\sqrt{3}}{6}+4$　　D.$\frac{13\sqrt{3}}{2}+4$

11.已知在△ABC 中，$AB=AC=2$，$BC=3$，点 E 是边 BC 上的动点，则当 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 取得最小值时，$|\overrightarrow{EA}|=$

A.$\frac{\sqrt{37}}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{37}}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{14}}{2}$

12.已知 $a>0,b>0$，$\ln a=\frac{\ln b}{2}=\frac{\ln(3a+2b)}{3}$，则下列说法正确的是

A.$b=2a$　　B.$3a+2b=b^3$　　C.$\frac{\ln b}{\ln(a+1)}=\log_2 3$　　D.$e^{\frac{\ln b}{4}}=3$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知复平面中第四象限内的点 Z 所对应的复数为 $z=2+ai$，且 $|z|=5$，则实数 a 的值为______.

14.已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+2\alpha\right)=$______.

15.在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=4$，E 为 CD 的中点，若 $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu=$______.

16.已知关于 x 的不等式 $2\ln x+ax-2x^2\leq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）

已知向量 a 与 b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，$a\cdot b=-2$，$|a|=1$.

（1）求 $|b|$ 的大小及 b 在 a 方向上的投影；

（2）求向量 b 与 $2a-b$ 夹角的余弦值.

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega\in N^*,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 对称，且在区间 $\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$ 上单调递增.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标变为原来的 2 倍得到 $g(x)$ 的图象. 当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，求 $g(x)$ 的值域.

19.（12 分）

随着我国经济发展、医疗消费需求增长、人们健康观念转变以及人口老龄化进程加快等因素的影响，医疗器械市场近年来一直保持了持续增长的趋势. 某医疗器械公司为了进一步增加市场竞争力，计划改进技术生产某产品. 已知生产该产品的年固定成本为 300 万元，最大产能为 100 台. 每生产 x 台，需另投入成本 $G(x)$ 万元，且 $G(x)=\begin{cases}2x^2-50x, & 0<x\leqslant 40,\\ 201x-\frac{3600}{x}-2100, & 40<x\leqslant 100.\end{cases}$ 由市场调研知，该产品每台的售价为 200 万元，且全年内生产的该产品当年能全部销售完.

（1）写出年利润 $W(x)$ 万元关于年产量 x 台的函数解析式（利润＝销售收入－成本）；

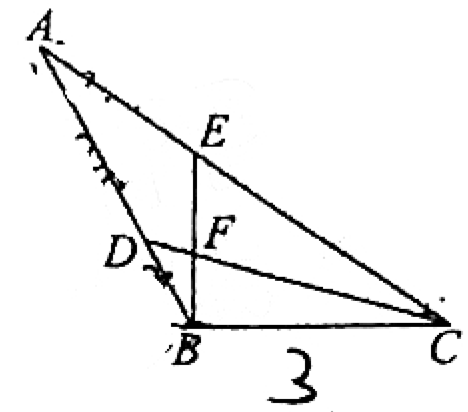
（2）当该产品的年产量为多少时，公司所获利润最大？最大利润是多少？

20.(12 分)

如图,在$\triangle ABC$中,$\cos\angle ABC=-\dfrac{5}{27}$,$AC=10$,$BC=3$,点$D$,$E$分别在边$AB$,$AC$上,且$AD=2DB$,$BE\perp BC$,$BE$与$CD$交于点$F$.

求:(1)$\triangle ABC$的面积;

(2)CF的长.



21.(12 分)

已知函数$f(x)=x^2e^x+\dfrac{1}{2}ax^2+2ax-3$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)当$a=-e$时,求函数$f(x)$的单调区间;

(2)证明:当$a\geqslant1$时,$f(x)-\dfrac{4}{e^2}\geqslant2a\ln a-a^2-4a$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系xOy中,曲线C的普通方程为$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$,以坐标原点为极点,x轴正半轴为极轴,建立极坐标系,直线l的极坐标方程为$2\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{6}{\rho}$.

(1)求直线l的直角坐标方程,并写出曲线C的一个参数方程;

(2)已知M是曲线C上的点,求点M到直线l的距离的最小值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设函数$f(x)=|x+1|-2|x-2|$的最大值为t.

(1)解不等式$f(x)\geqslant2$;

(2)若$2a^2+5b^2+3c^2=t$,求$2ab+3bc$的最大值.

2022 届高三一轮复习联考(一)　全国卷 1

理科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$\frac{z}{z-i}=\frac{1+i}{1-2i}=\frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.故选 A.

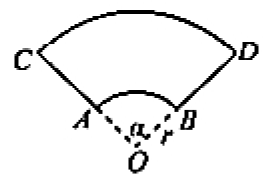
2.C 【解析】由题意得 $A=\{x\mid -3<x<4\}$,$B=\{0,1,2,3,4\}$,则 $A\cap B=\{0,1,2,3\}$.故选 C.

3.C 【解析】全称命题的否定是特称命题,所以该命题的否定是 $\exists x_0>0,\cos x_0\leqslant -\frac{1}{2}x_0^2+1$.故选 C.

4.A 【解析】$\sin 160°\cos 40°+\cos 20°\cos 50°=\sin 20°\cos 40°+\cos 20°\sin 40°=\sin(20°+40°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 A.

5.A 【解析】因为 $f(x)=x\ln x^2-x+1=2x\ln x-x+1$,所以 $f(e)=e+1$.因为 $f'(x)=2\ln x+1$,所以 $f'(e)=3$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为 $y-(e+1)=3(x-e)$,即 $3x-y-2e+1=0$.故选 A.

6.D 【解析】如图,设 $\angle AOB=\alpha$,$OB=r$,由弧长公式可得 $\begin{cases}80=\alpha r,\\160=\alpha(r+40),\end{cases}$ 解得 $\alpha=2$,$r=40$,则该壁画的扇面面积为 $S_{扇形COD}-S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}\times160\times(40+40)-\frac{1}{2}\times80\times40=4\ 800(cm^2)$.故选 D.



7.D 【解析】$f(x)$ 的定义域为 R,$f(-x)=\frac{-x\cdot\cos(-x)}{e^{|-x|}}=\frac{-x\cdot\cos x}{e^{|x|}}=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数,排除 C;$f(1)=\frac{\cos 1}{e}>0$,排除 A,$f(2)=\frac{2\cos 2}{e^2}<0$,排除 B.故选 D.

8.B 【解析】对于 A,$p:x>y>0$,$q:x>y>0$,故 p 是 q 的充要条件,不符合题意,舍去;对于 B,由题意得 $\frac{2}{a}=\frac{a}{8}\neq\frac{3}{6}$,解得 $a=-4$,故 p 是 q 的充分不必要条件,符合题意;对于 C,函数 $f(x)$ 若有两个零点,则 $\Delta=4a^2-8(a+4)>0$,解得 $a<-2$ 或 $a>4$,故 p 是 q 的既不充分也不必要条件,不符合题意,舍去;对于 D,易知由 q 可推出 p,若 $a=1$,$b=6$,满足 $a+b>6$,但不满足 $a>3$ 且 $b>3$,故 p 是 q 的必要不充分条件,不符合题意,舍去.故选 B.

9.A 【解析】当与直线 $y=x$ 平行的直线与 $f(x)$ 的图象相切时,切点到直线 $y=x$ 的距离为 $|AB|$ 的最小值.令 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}=1$,解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{2}$(舍去),又 $f(1)=3$,所以切点 $C(1,3)$ 到直线 $y=x$ 的距离即为 $|AB|$ 的最小值,$|AB|_{\min}=\sqrt{2}$.故选 A.

10.B 【解析】由题意 $b^2=ac$,$B=\frac{\pi}{3}$ 可得 $\triangle ABC$ 为等边三角形.在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理可得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D$,由于 $AD=3$,$CD=2$,代入上式可得 $b^2=13-12\cos D$,所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}b^2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 6\sin D=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+3\sin D=\frac{\sqrt{3}}{4}(13-12\cos D)+3\sin D=6\sin\left(D-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{13\sqrt{3}}{4}$,所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{13\sqrt{3}}{4}+6$.故选 B.

11.A 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC=2$,$BC=3$,则 $\cos\angle ABC=\frac{4+9-4}{2\times2\times3}=\frac{3}{4}$,$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EB}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{EB}^2+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EB}^2+|\overrightarrow{EB}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos(\pi-\angle ABC)=\overrightarrow{EB}^2-\frac{3}{2}|\overrightarrow{EB}|=\left(|\overrightarrow{EB}|-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$,则当 $|\overrightarrow{EB}|=\frac{3}{4}$ 时,$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 取得最小值 $-\frac{9}{16}$,此时 $|\overrightarrow{EA}|^2=4+\frac{9}{16}-2\times2\times\frac{3}{4}\times\cos\angle ABC=\frac{37}{16}$,$|\overrightarrow{EA}|=\frac{\sqrt{37}}{4}$.故选 A.

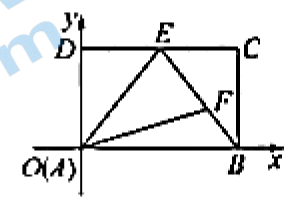
12.C 【解析】由题意得 $6\ln a=3\ln b=2\ln(3a+2b)$,则 $a^6=b^3=(3a+2b)^2$,则有 $a^2=b$,代入上式有 $a^6=(3a+2a^2)^2$,化简得 a^2-

$2a-3=0$,即$(a-3)(a+1)=0$,因为$a>0$,所以$a=3$,$b=9$,则$b\neq 2a$,A错误;$3a+2b=27\neq b^3$,B错误;$\frac{\ln b}{\ln(a+1)}=\frac{\ln 9}{\ln 4}=\frac{\ln 3}{\ln 2}=\log_2 3$,C正确;$e^{\frac{\ln b}{a}}=e^{\frac{\ln 9}{3}}=(e^{\ln 9})^{\frac{1}{3}}=9^{\frac{1}{3}}\neq 3$,D错误.故选C.

13.$-\sqrt{21}$ 【解析】因为$|z|=5$,所以$\sqrt{4+a^2}=5$,所以$a=\pm\sqrt{21}$,因为$Z(2,a)$在第四象限,所以$a<0$,可得$a=-\sqrt{21}$.

14.$-\frac{5}{6}$ 【解析】$\sin\left(\frac{5\pi}{6}+2\alpha\right)=\sin\left[\frac{3\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=-\cos\left[2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-1=2\times\frac{3}{36}-1=-\frac{5}{6}$.

15.$\frac{7}{6}$ 【解析】建立如下图的坐标系,由已知得$B(6,0)$,$D(0,4)$,$E(3,4)$,由$\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{FB}$得$\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EB}$,设$F(x,y)$,则$(x-3,y-4)=\frac{2}{3}(3,-4)$,解得$F\left(5,\frac{4}{3}\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(5,\frac{4}{3}\right)=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=(6\lambda,4\mu)$,解得$\lambda=\frac{5}{6}$,$\mu=\frac{1}{3}$,则$\lambda+\mu=\frac{7}{6}$.



16.$(-\infty,2]$ 【解析】因为$x>0$,所以不等式可化为$\frac{a}{2}\leqslant x-\frac{\ln x}{x}$,设$f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$,则$f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$,设$g(x)=x^2+\ln x-1$,易知$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$g(1)=0$,则当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以$f(x)_{\min}=f(1)=1$,则$\frac{a}{2}\leqslant 1$,即$a\in(-\infty,2]$.

17.【解析】(1)因为$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=-2$,所以$|b|=4$. ……………………………… 3分

所以b在a方向上的投影为$|b|\cos\frac{2\pi}{3}=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$. ……………………………… 6分

(2)$|2a-b|=\sqrt{(2a-b)^2}=\sqrt{4a^2-4a\cdot b+b^2}=2\sqrt{7}$,$b\cdot(2a-b)=2a\cdot b-b^2=-20$, ……………… 9分

设向量b与$2a-b$的夹角为θ,则$\cos\theta=\frac{b\cdot(2a-b)}{|b|\cdot|2a-b|}=\frac{-20}{4\times 2\sqrt{7}}=-\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ……………… 12分

18.【解析】(1)因为$f(x)$的图象关于$x=-\frac{5\pi}{12}$对称,且在区间$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$上单调递增,则$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-1$,即$-\frac{5\pi}{12}\omega+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,$0-\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{12}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,则$0<\omega\leqslant\frac{12}{5}$, ……………… 3分

又因为$\omega\in\mathbf{N}^*$,则$\omega=1$或2. ……………… 4分

若$\omega=1$,则$-\frac{5\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{12}$,则$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$; ……………… 5分

若$\omega=2$,则$-\frac{5\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$,则$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ……………… 6分

(2)因为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,$g(x)=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$, ……………… 8分

$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,$4x+\frac{\pi}{3}\in\left[\pi,\frac{7\pi}{3}\right]$,因为$y=\sin x$在$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$单调递减,在$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7}{3}\pi\right)$单调递增, ……………… 10分

所以$\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,所以函数$g(x)$的值域为$[-2,\sqrt{3}]$. ……………… 12分

19.【解析】(1)当$0<x\leqslant 40$时,$W(x)=200x-(2x^2+80x)-300=-2x^2+120x-300$; ……………… 2分

当$40<x\leqslant 100$时,$W(x)=200x-\left(201x+\frac{3\,600}{x}-2\,100\right)-300=-\left(x+\frac{3\,600}{x}\right)+1\,830$, ……………… 4分

所以 $W(x)=\begin{cases}-2x^2+120x-300, & 0<x\leqslant 40,\\ -\left(x+\dfrac{3\,600}{x}\right)+1\,800, & 40<x\leqslant 100.\end{cases}$ ……………………………… 5 分

(2)若 $0<x\leqslant 40$，$W(x)=-2(x-30)^2+1\,500$，

当 $x=30$ 时，$W(x)_{\max}=1\,500$ 万元. ……………………………… 8 分

若 $40<x\leqslant 100$，$W(x)=-\left(x+\dfrac{3\,600}{x}\right)+1\,800\leqslant -120+1\,800=1\,680$，

当且仅当 $x=\dfrac{3\,600}{x}$ 时，即 $x=60$ 时，$W(x)_{\max}=1\,680$ 万元. ……………………………… 11 分

则该产品的年产量为 60 台时，公司所获利润最大，最大利润是 1 680 万元. ……………………………… 12 分

20.【解析】(1)在△ABC 中，由余弦定理得 $AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=AC^2$，即 $9AB^2+10AB-819=0$，解得 $AB=9$ 或 $AB=-\dfrac{91}{9}$（负值舍去）. ……………………………… 3 分

$\sin\angle ABC=\dfrac{8\sqrt{11}}{27}$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times 9\times 3\times\dfrac{8\sqrt{11}}{27}=4\sqrt{11}$. ……………………………… 6 分

(2)因为 $AD=2DB$，$AB=9$，所以 $BD=3$.

在△BCD 中，由余弦定理得 $CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle DBC$，

即 $CD^2=9+9-2\times 3\times 3\times\left(-\dfrac{5}{27}\right)$，解得 $CD=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 8 分

由正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin\angle DCB}=\dfrac{CD}{\sin\angle DBC}$，即 $\dfrac{3}{\sin\angle DCB}=\dfrac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{\frac{8\sqrt{11}}{27}}$，

解得 $\sin\angle DCB=\dfrac{\sqrt{33}}{9}$，则 $\cos\angle DCB=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. ……………………………… 10 分

在 Rt△FBC 中，$CF=\dfrac{BC}{\cos\angle DCB}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. ……………………………… 12 分

21.【解析】(1)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=(x^2+2x)e^x+a(x+2)=(x+2)(xe^x+a)$，

当 $a=-e$ 时，$f'(x)=(x+2)(xe^x-e)$， ……………………………… 2 分

设 $g(x)=xe^x$，则 $g'(x)=(x+1)e^x$，易知当 $x<-1$ 时，$g(x)=xe^x<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，又因为 $g(1)=e$，且 $x<0$ 时，$g(x)<0$，所以方程 $xe^x-e=0$ 有唯一解 $x=1$，且当 $x<1$ 时，$xe^x-e<0$，当 $x>1$ 时，$xe^x-e>0$.

……………………………… 4 分

则当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(-2,1)$. ……………………………… 6 分

(2)证明：由(1)知，$f'(x)=(x+2)(xe^x+a)$，$g(x)=xe^x$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(x)\geqslant g(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

又因为 $a\geqslant 1$，则 $xe^x+a\geqslant 1-\dfrac{1}{e}>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\geqslant f(-2)=\dfrac{4}{e^2}-2a-3$.

则有 $f(x)-\dfrac{4}{e^2}-2a\ln a+a^2+4a\geqslant a^2+2a-2a\ln a-3$， ……………………………… 9 分

设 $h(a)=a^2+2a-2a\ln a-3$，$a\geqslant 1$，则 $h'(a)=2(a-\ln a)$，

令 $t(a)=a-\ln a, t'(a)=1-\frac{1}{a}$，

因为 $a\geqslant 1$，所以 $t'(a)\geqslant 0$。

所以 $t(a)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$t(a)\geqslant t(1)=1$，即 $h'(a)>0$。

所以 $h(a)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(a)\geqslant h(1)=1+2-0-3=0$。

所以 $f(x)-\frac{4}{e^2}-2a\ln a+a^2+4a\geqslant a^2+2a-2a\ln a-3\geqslant 0$，得证. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$ （φ 为参数）； ………………………………………………………… 3 分

l 的直角坐标方程为 $2\sqrt{2}x+y-6=0$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可设 $M(\cos\varphi,\sqrt{2}\sin\varphi)$，

M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2}\sin\varphi-6|}{3}=\frac{|\sqrt{10}\sin(\varphi+\alpha_0)-6|}{3}$，其中 $\tan\alpha_0=2$。 ………………………………… 8 分

当 $\sin(\varphi+\alpha_0)=1$ 时，d 取得最小值 $\frac{6-\sqrt{10}}{3}$. ………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(1) $f(x)=|x+1|-2|x-2|=\begin{cases}x-5, & x\leqslant -1,\\ 3x-3, & -1<x\leqslant 2,\\ -x+5, & x>2.\end{cases}$

令 $f(x)\geqslant 2$，则有 $\begin{cases}x-5\geqslant 2,\\ x\leqslant -1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x-3\geqslant 2,\\ -1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-x+5\geqslant 2,\\ x>2.\end{cases}$

解得 $\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant 3$，所以不等式的解集为 $\left[\frac{5}{3},3\right]$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可知，函数 $f(x)=|x+1|-2|x-2|$ 的最大值为 $t=f(2)=3$。

所以 $3=2a^2+5b^2+3c^2=2(a^2+b^2)+3(b^2+c^2)\geqslant 4ab+6bc$， ………………………………………………………… 8 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{30}}{10}$ 时等号成立，

所以 $3\geqslant 4ab+6bc$，即 $2ab+3bc\leqslant\frac{3}{2}$，

所以 $2ab+3bc$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$. ………………………………………………………… 10 分