高三阶段检测
数学参考答案

1. C　$(1+i)(2+i)=1+3i$，虚部为 3.

2. C　因为 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|-1<x<3\}$，所以 $A\cup B=\{x|x<3\}$.

3. A　圆 $x^2-4x+y^2-2y=0$ 的圆心坐标为 $(2,1)$，则 $1^2=2p\times2$，得 $p=\frac{1}{4}$，所以该抛物线的焦点坐标为 $(\frac{1}{8},0)$.

4. B　将这 14 个数据(单位:%)按照从小到大的顺序排列为 103.33，104.18，104.69，105.66，106.71，106.77，107.52，107.74，107.81，108.29，108.48，108.90，110.66，119.01，因为 $14\times60\%=8.4$，所以这 14 个数据的第 60 百分位数是排序后的第 9 个数据，即 107.81，对应的地区是玉林市.

5. D　$(2x-\frac{a}{x})^6$ 的展开式中 x^4 的系数为 $C_6^5\times2^5\times(-a)=-192a$，因为 $a>1$，所以 $-192a<-192$.

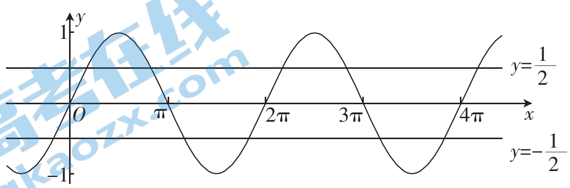
6. B　$\begin{pmatrix}\lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25\\ \lg 5 & \lg 256\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8^{\frac{2}{3}}\\ 2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\lg 2 & 2\lg 5\\ \lg 5 & \lg 2^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 2+\lg 5\\ 4\lg 5+4\lg 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$.

7. D　设圆台的高为 h，则 $\frac{\pi}{3}h(1^2+1\times3+3^2)=13\pi$，得 $h=3$. 故该圆台的母线与底面所成角的正切值为 $\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$.

8. D　由 $|f(x_0)|=1$，得 $\sin(\omega x_0-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{1}{2}$，

因为 $x\in(0,\pi)$，$\omega>0$，所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3})$，

依题意可得，$\frac{19\pi}{6}<\omega\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{23\pi}{6}$，解得 $\omega\in(\frac{7}{2},\frac{25}{6}]$.



9. AC　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(-2,3)$，A 正确. 因为 $OA\perp OC$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=m+8=0$，则 $m=-8$，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-9,2)$，B 错误. 因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}=(5,-3)$，所以 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$，C 正确. $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}\cdot\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{16+12}{(-8)^2+4^2}\cdot\overrightarrow{OC}=$

$\frac{7}{20}\overrightarrow{OC}$,D 错误.

10. BCD　因为该正方体的棱长为$\sqrt{5}$,所以其体积为$(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$,表面积为$6\times(\sqrt{5})^2=30$,A 错误,C 正确. 该正方体的内切球的直径为$\sqrt{5}$,所以内切球的体积为$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{5}}{2})^3=\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi$,B 正确. 该正方体的外接球的直径为$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$,所以外接球的表面积为$4\pi\times(\frac{\sqrt{15}}{2})^2=15\pi$,D 正确.

11. ACD　因为$M\sim N(250,\sigma^2)$,所以$P(M>249)=P(M<251)=0.75$,A 正确. 因为$P(M<251)=0.75$,所以$P(249<M<250)=P(250<M<251)=0.75-0.5=0.25$,所以$P(251<M<253)=0.7-0.25\times2=0.2$,B 错误. 因为$P(249<M<253)=0.7$,所以$P(M>253)=0.75-0.7=0.05$,若从该阿胶产品中随机选取 1000 盒,则质量大于 253 g 的盒数$X\sim B(1000,0.05)$,所以$D(X)=1000\times0.05\times(1-0.05)=47.5$,C 正确. $P(251<M<253)=0.2$,若从该阿胶产品中随机选取 1000 盒,则质量在 251 g～253 g 内的盒数$Y\sim B(1000,0.2)$,所以$E(Y)=1000\times0.2=200$,D 正确.

12. ABD　因为$c^2+ab=c+abc$,所以$c(c-ab)-(c-ab)=0$,即$(c-ab)(c-1)=0$,因为$c>1$,所以$c=ab>1$,则$|a|+|b|\geqslant2\sqrt{|ab|}>2$,所以$|a|+|b|>2$,A 正确. 若$c=a+b>1$,则$ab=a+b$,且$a,b$均为正数,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,则$3a+4b=(3a+4b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}+7\geqslant2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+7=7+4\sqrt{3}$,当且仅当$\frac{3a}{b}=\frac{4b}{a}$,即$a=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$,$b=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$时,等号成立,则$3a+4b$的最小值为$7+4\sqrt{3}$,B 正确. 因为$c=ab>1$,所以$\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)=\log_2\frac{|ab|}{1+c^2}=\log_2\frac{c}{1+c^2}=\log_2\frac{1}{\frac{1}{c}+c}$,因为$c>1$,所以$\frac{1}{c}+c>2$,所以$\log_2|a|+\log_2|b|-\log_2(1+c^2)<\log_2\frac{1}{2}=-1$,C 错误. 由$4c^2-a^4-b^4=6$,则$4c^2=a^4+b^4+6\geqslant2\sqrt{a^4b^4}+6=2a^2b^2+6=2c^2+6$,则$c^2\geqslant3$,由$c>1$,得$c\geqslant\sqrt{3}$,则$c$的最小值为$\sqrt{3}$,D 正确.

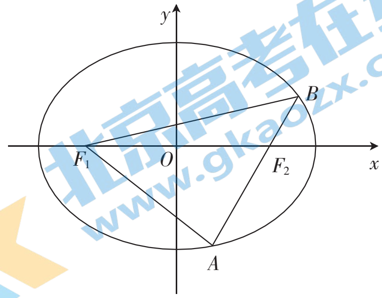
13. 4　因为$f(x)$是奇函数,所以$f(-3)=-f(3)=4$.

14. 32　依题意可得$\{a_n\}$的前 8 项为 0,2,4,8,12,18,24,32.

15. $-\frac{2}{3}$　因为$y=\frac{x^4-x^3}{x-1}=x^3(x\neq1)$,所以$y'=3x^2(x\neq1)$,由$3m^2=3$,得$m=-1$或$m=1$(舍去). 所以该切线的方程为$y=3x+2$,所以该切线在$x$轴上的截距为$-\frac{2}{3}$.

16. $\frac{2}{3}$　如图,由$\triangle AF_1F_2$的面积是$\triangle BF_1F_2$面积的 2 倍,可得$|AF_2|=2|BF_2|$,不妨设$|AF_2|=2x$,$|BF_2|=x$,$|F_1F_2|=2c$,则$|AF_1|=2a-2x$,$|BF_1|=2a-x$. 在$\triangle AF_1F_2$中,由

$|AF_2|^2+|F_1F_2|^2-|AF_1|^2=2|AF_2||F_1F_2|\cos 60°$，得 $4x^2+4c^2-(2a-2x)^2=4cx$，整理得 $4c^2-4a^2+8ax-4cx=0$. 在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由 $|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-|BF_1|^2=2|BF_2||F_1F_2|\cos 120°$，得 $x^2+4c^2-(2a-x)^2=-2cx$，整理得 $4c^2-4a^2+4ax+2cx=0$，则 $x=\frac{3a^2-3c^2}{4a}$，整理得 $c^2-a^2+\frac{3c(a^2-c^2)}{2a}=0$，即 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$. 故 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$.



17. 解：$\angle CBD=180°-\angle BCD-\angle BDC=55°$，………………………… 1 分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，………………… 4 分

则 $BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\frac{116\times\sin 30°}{\sin 55°}=\frac{58}{0.82}\approx 70.73$ m. ………………… 7 分

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AB\perp BD$，$\angle ADB=45°$，………………………… 8 分

所以 $AB=BD\tan\angle ADB=BD\approx 70.73$ m，

故黄河楼的实际高度约为 70.7 m. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由 $a_n+n^4=b_n+(n+1)^4$，$a_2=66$，得 $b_2=1$，………………………… 1 分

因为 $b_{n+1}=2b_n$，所以 $b_1=\frac{1}{2}$，且$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为 2 的等比数列，……… 3 分

所以 $b_n=\frac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{n-2}$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $a_n=2^{n-2}+(n+1)^4-n^4$，………………………………………… 6 分

所以 $S_n=\frac{1}{2}+1+\cdots+2^{n-2}+2^4-1^4+3^4-2^4+\cdots+(n+1)^4-n^4$ ……………… 8 分

$=\frac{\frac{1}{2}-2^{n-2}\times 2}{1-2}+(n+1)^4-1^4$ ………………………………………… 10 分

$=2^{n-1}+(n+1)^4-\frac{3}{2}$. ………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)依题意可得 $\begin{cases}13+6+4+11+p+1+7+q=60,\\ \frac{11+q}{60}=\frac{4}{15},\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}p=13,\\ q=5.\end{cases}$ ………………………………………………… 4 分

(2)将每个数据都减去 28.50 后所得新数据的平均数为$\frac{1}{60}[0.01\times 13+0.02\times 6+0\times 4+(-0.02)\times 11+(-0.01)\times 13+0.04\times 1+0.03\times 7+(-0.03)\times 5]=0$，……… 6 分

所以 $\bar{x}=0+28.50=28.50$，………………………………………… 7 分

所以 $\bar{x}-s=28.48$，$\bar{x}+s=28.52$. ………………………………………… 9 分

所以这 60 个零件内径尺寸在$[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$内的个数为 $60-1-7-5=47$，…………… 11 分

因为$\frac{47}{60}<\frac{48}{60}=0.8$，所以这次抽检的零件不合格. …………………………………………… 12 分

20.(1)证明：取 AD 的中点 F，连接 EF，PF，BD. 因为$\triangle PAD$ 是正三角形，所以 $PF\perp AD$. ……………………………………………………………………………………………………… 1 分

又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，所以 $PF\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $PF\perp AC$. ……………………………………………………… 3 分

因为 E 是 AB 的中点，所以 $EF/\!/BD$. 又底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，从而 $EF\perp AC$. ……………………………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $PF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$平面 PEF. ………………………………………………………… 5 分

因为 $PE\subset$平面 PEF，所以 $AC\perp PE$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)解：连接 BF，因为$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以$\triangle ABD$ 是正三角形，所以 $BF\perp AD$. ………… 7 分

以 F 为坐标原点，FA，FB，FP 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

令 $AB=2$，则 $C(-2,\sqrt{3},0)$，$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

则$\overrightarrow{CE}=(\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(2,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ……………………………………………… 8 分

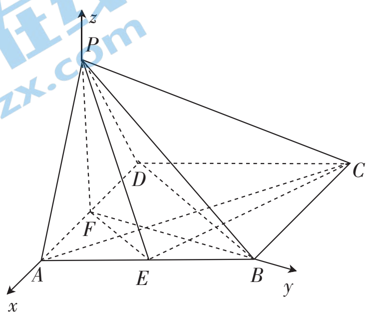
设平面 CEP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{5}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}=2x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}z_0=0,\end{cases}$

令 $x_0=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},5,3)$. ………………………………………………………………… 9 分

由题可知，$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$是平面 ACE 的一个法向量. …………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{37}}=\frac{3\sqrt{37}}{37}$，……………………………………………………… 11 分

由图可知，二面角 $A-CE-P$ 为锐角，则二面角 $A-CE-P$ 的余弦值为$\frac{3\sqrt{37}}{37}$. …… 12 分



21. 解：(1)将点$(3,\frac{5}{2})$和点$(4,\sqrt{15})$的坐标代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{\frac{25}{4}}{b^2}=1,\\ \frac{16}{a^2}-\frac{15}{b^2}=1,\end{cases}$ ……………… 1 分

解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=5,\end{cases}$ …………………………………………………………………… 3 分

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)依题意可得直线 PQ 的斜率存在，设 PQ：$y=kx+1$.

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$ 得$(5-4k^2)x^2-8kx-24=0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=\frac{-24}{5-4k^2}$， …………………………………………… 6 分

所以$|MP|\cdot|MQ|=(\sqrt{1+k^2}|x_1-0|)\cdot(\sqrt{1+k^2}|x_2-0|)=(1+k^2)|x_1x_2|=$
$\frac{24(1+k^2)}{|5-4k^2|}$. …………………………………………………………………………… 7 分

$F(3,0)$，直线 AB：$y=k(x-3)$. 设 $A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$.

联立$\begin{cases}y=k(x-3),\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$ 得$(5-4k^2)x^2+24k^2x-36k^2-20=0$，

则$\begin{cases}x_3+x_4=\frac{-24k^2}{5-4k^2},\\ x_3x_4=\frac{-36k^2-20}{5-4k^2},\end{cases}$ ………………………………………………………… 9 分

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{-24k^2}{5-4k^2})^2-4\cdot\frac{-36k^2-20}{5-4k^2}}=\frac{20(1+k^2)}{|5-4k^2|}$， ………………………… 11 分

所以$\frac{|MP|\cdot|MQ|}{|AB|}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$，所以$\frac{|MP|\cdot|MQ|}{|AB|}$为定值，定值为$\frac{6}{5}$. …………………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=(2x-n+2)e^x$， …………………………………………………………………… 1 分

当 $x<\frac{n-2}{2}$时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{n-2}{2}$时，$f'(x)>0$. ……………………………………… 3 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,\frac{n-2}{2})$，单调递增区间为$(\frac{n-2}{2},+\infty)$. ………… 5 分

(2)证明：要证 $f(x)<xe^{2x}$，只需证 $2x-n<xe^x$，即证 $xe^x-2x+n>0$. ……………… 6 分

设函数 $g(x)=xe^x-2x+n$，则 $g'(x)=(x+1)e^x-2$，$g'(x)$的导函数 $g''(x)=(x+2)e^x$，

则 $g'(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减，在$(-2,+\infty)$上单调递增，……………………………… 7 分

所以 $g'(x)_{\min}=g'(-2)=-\frac{1}{e^2}-2<0$，当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$，…………………………… 8 分

所以 $g'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上存在唯一零点 m. 因为 $g'(0)<0$，$g'(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{e}-4}{2}>0$，所以 $m\in(0,\frac{1}{2})$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $g(x)$ 在 $(-2,m)$ 上单调递减，在 $(m,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(m)=me^m-2m+n$. 又 $g'(m)=(m+1)e^m-2=0$，所以 $me^m=2-e^m$，

所以 $g(x)_{\min}=2-e^m-2m+n$. ……………………………………………………………… 10 分

设函数 $h(m)=2-e^m-2m+n$，则 $h(m)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，所以 $h(m)>h(\frac{1}{2})=n+1-\sqrt{e}$，

………………………………………………………………………………………… 11 分

因为 n 为正整数，所以 $n+1-\sqrt{e}\geqslant 2-\sqrt{e}>0$，所以 $g(x)_{\min}>0$，所以 $f(x)<xe^{2x}$. … 12 分